



FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DE MÁSTER:

TEOREMA DE CONVEXIDAD DE LA APLICACIÓN MOMENTO

Esta tesis fue hecha por Alejo López para el Máster en Matemáticas y Aplicaciones

Supervisada por:
Marco Zambon

Agradecimientos

Me gustaría agradecer esta tesis a todos aquellos que la han hecho posible. En especial a mi tutor, Marco Zambon, por quien siento un gran respeto como matemático y como persona, por toda su dedicación, consejos y tiempo, invertidos en esta tesis y en formarme en geometría, así como matemático.

También a los profesores del máster por su esfuerzo en enseñarme, paciencia y consejos, y por haber incrementado mi interés por algunas ramas de las matemáticas.

Y por último a mis compañeros con quienes he compartido cursos, conocimientos y buenos momentos. Les deseo lo mejor en sus respectivas carreras.

Índice general

0.1. Introducción	4
1. Geometría simpléctica lineal	7
1.1. Espacios vectoriales simplécticos	7
1.2. Subespacios de un espacio vectorial simpléctico	11
1.3. Variedades simplécticas.	12
1.4. Introducción a grupos y álgebras de Lie.	15
1.5. Estructuras complejas	16
1.6. Grupo simpléctico	21
2. Acciones en variedades simplécticas	23
2.1. Campos Hamiltonianos	23
2.2. Acciones en variedades.	29
2.3. Acciones simplécticas y hamiltonianas.	31
2.4. Representaciones adjunta y coadjunta	33
2.5. Reducción simpléctica	38
2.6. Ejemplos de acciones hamiltonianas	40

3. Teorema de convexidad de la aplicación momento	45
3.1. Propiedades generales de la aplicación momento	46
3.2. Teorema de convexidad local	49
3.3. Teorema de convexidad global	59
3.4. Aplicación del teorema de convexidad, el Teorema de Schur-Horn	62

0.1. Introducción

El objetivo de esta tesis es el teorema de convexidad de la aplicación momento, el enunciado 3.3.5. Este resultado fue probado por Atiyah (1982), y poco después por V. Guillemin y S. Sternberg (1983). Más concretamente queremos ver que la imagen de la aplicación momento de la acción de un toro sobre una variedad simpléctica compacta es un polítopo convexo, esto es, la intersección de una cantidad finita de inecuaciones. Para ello necesitamos saber antes que significan esto.

Una forma simpléctica, ω , es una dos forma cerrada y no degenerada. Si tomamos una variedad, M , que admita una de estas formas tendremos una variedad simpléctica y el estudio de estas y sus morfismos (simplectomorfismo, difeomorfismos que conservan ω) será la geometría simpléctica. Análogamente a considerar la geometría Riemanniana como el estudio de los objetos que conservan ángulos y longitudes, la simpléctica será el estudio de los objetos que conservan la forma simpléctica y estos serán sensibles la orientación. Estas dos geometrías pese a comenzar definiendo una forma bilineal, en el tangente y el cotangente, poseen muchas diferencias entre ellas. Para empezar mientras que una métrica es admisible en toda variedad, una forma simpléctica sólo se puede tener en variedades de dimensión par y orientables. Y con segundo grupo de De Rham no nulo si esta es compacta. Se tiene por ejemplo que la única esfera que puede ser tratada como variedad simpléctica es la 2-esfera. Otra de las características típicas de las variedades simplécticas es que no tienen invariantes locales, menos la dimensión; esto es, a igual dimensión localmente todas son simplectomorfas. El que no existan dichos invariantes nos permite un número tan grande de transformaciones. Si miramos las simetrías de una variedad riemanniana, es decir que conserven ángulos y distancias, nos podemos encontrar con que existen variedades riemannianas que no admiten ninguna, mientras las simplécticas tienen un gran número. El número de simetrías, aquellas que conservan área y orientación, no sólo hay siempre, si no que hay una cantidad infinitas.

El comienzo de la geometría simpléctica está estrechamente relacionado con la mecánica.

El origen se puede situar hacia 1808 cuando Lagrange realiza sus estudios sobre la mecánica celeste. En las ecuaciones que empleó para definir el movimiento de los astros ya venía implícita la idea. Este planteamiento fue extendido por Hamilton dando lugar a lo que conocemos como mecánica Hamiltoniana. A finales del siglo XIX y principios del XX, Jacobi, Liouville y Poisson, entre otros muchos, sentaron las bases. Pero no fue hasta 1939 que Weyl introdujo el término “simpléctica”, que no es otra cosa que la versión latina de la palabra “compleja”.

El texto comienza planteando la geometría simpléctica a nivel de álgebra lineal y mostrando algunos resultados básicos de esta y de geometría en general. Para nuestro teorema hará falta algún concepto más, como el de grupo de Lie. Éste es una variedad que es a la vez grupo, siendo enlazadas ambas estructuras pidiendo que la inversa y el producto sean diferenciables. El álgebra de Lie asociada a un grupo será la aproximación infinitesimal de ese grupo, dándonos un espacio vectorial con una forma bilineal antisimétrica que cumple la fórmula de Jacobi. Si a una estructura de álgebra de Lie le añadimos la regla de Leibniz se tiene un álgebra de Poisson. Ésta se define normalmente sobre las funciones y vendrá denotada como $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$. Si un campo conserva nuestra forma simpléctica, $\mathcal{L}_X\omega = 0$, éste se llamará simpléctico. El ser simpléctico se puede ver que es equivalente a que el producto interno del campo en la forma sea una forma cerrada, $i_X\omega \in \Omega^1_{\text{cerradas}}(M)$. Si pedimos algo más fuerte, que $i_X\omega$ sea exacta tendremos un campo hamiltoniano.

En la segunda parte de la tesis se presentan las acciones en variedades simplécticas, los casos más destacados y una motivación mecánica. Para hacernos una idea; si tenemos la acción diferenciable de un grupo de Lie sobre una variedad, $\Phi : G \curvearrowright (M, \omega)$, esto nos da un morfismo de grupos entre el grupo que actúa y los difeomorfismos en la variedad. La acción nos genera una acción infinitesimal, que a cada vector en el álgebra de Lie, $v \in \mathfrak{g}$, nos induce un campo de la siguiente forma: $v_M(p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi_{\exp(-tv)}(p) \in \chi(M)$. Si la variedad es simpléctica podemos considerar aquellas acciones tales que el morfismo vaya a los simplectomorfismos. Esto nos es equivalente a que la acción infinitesimal nos genere campos simplécticos. Incluso podemos buscar acciones de tal forma que generen campos Hamiltonianos. En realidad no es algo tan fuerte como pudiera parecer ya que localmente ambos campos son lo mismo. Si tomamos un abierto simplemente conexo de la variedad y miramos la cohomología de De Rham vemos que todos los simplécticos en él son hamiltonianos. Que cada campo inducido por la infinitesimal sea hamiltoniano significa que se le puede asociar una función de M . La aplicación que a cada elemento del álgebra de Lie le da el campo inducido y de ese campo da la función que le corresponde se llama aplicación comomento si es un morfismo de álgebras. Al dual de dicho morfismo, $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, lo llamamos aplicación momento. Que exista una es equivalente a que exista la otra y diremos que la acción es hamiltoniana.

La tercera y última parte de la tesis supone la prueba del teorema de convexidad da la

aplicación momento, así que su aplicación el teorema de Schur-Horn, resultado anterior que fue una de las motivaciones para este teorema. Dividiremos la prueba en tres partes. En la primera veremos en la acción de un toro que la imagen de la aplicación momento de los puntos con un estabilizador común será la unión de una cantidad de componentes conexas, donde cada una de ellas es la envoltura convexa de un conjunto de las imágenes de los puntos fijos de la acción. Continuaremos comparando localmente, en un entorno de un punto fijo, nuestra aplicación momento con la de la acción a nivel lineal y viendo que su imagen difiere en una traslación. Esto nos permitirá, con un poco de teoría de representaciones, enunciar el teorema de convexidad de forma local, en los puntos fijos. Esto es, existe un entorno tal que la imagen en el álgebra será la intersección de un abierto y un cono centrado en el punto. Para terminar la demostración usaremos la teoría de Morse-Bott para ver que cada componente de la aplicación momento tendrá un único máximo local; lo cual junto con una versión relativa del teorema local nos dará el teorema de convexidad, como deseábamos. Terminaremos dando algunos ejemplos sencillos y usaremos nuestro teorema para demostrar el teorema de Schur-Horn, que nos dice que

Capítulo 1

Geometría simpléctica lineal

La geometría simpléctica es el estudio de las variedades con una forma simpléctica, esto es, con una forma diferencial no degenerada que sea cerrada. Ser una forma diferencial lleva implícita la antisimetría. El ser cerrada es una propiedad local, mientras que el ser no degenerada es puntual. Por tanto el estudio de ésta segunda es una propiedad de álgebra lineal el tangente. De ahí que empecemos por el estudio de los espacios vectoriales simplécticos.

En esta primera parte veremos también algunas definiciones y resultados clásicos de geometría simpléctica, así como de grupos y álgebras de Lie.

1.1. Espacios vectoriales simplécticos

Para empezar definiremos los conceptos más destacados de la sección para luego ver su comportamiento.

DEFINICIÓN 1. Forma bilineal antisimétrica: Es una forma bilineal definida en un espacio vectorial V , $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\Omega(v, w) = -\Omega(w, v) \quad \forall v, w \in V$$

DEFINICIÓN 2. Forma simpléctica: Es una forma antisimétrica, Ω , tal que es no degenerada, es decir:

$$\forall v \in V, v \neq 0, \exists w \in V \text{ tal que } \Omega(v, w) \neq 0$$

DEFINICIÓN 3. *Espacio vectorial simpléctico:* Es la dupla (V, Ω) , donde V es un espacio y Ω una forma simpléctica definida en él.

Veamos a continuación una forma estándar para las formas antisimétricas que nos permitirá expresar la forma en una base conveniente, ver que el único invariante es la dimensión y caracterizar la no degeneración de forma fácil. Denotaremos como V^\perp el ortogonal simpléctico de espacio vectorial V .

Teorema 1.1.1 (Forma estándar de una forma bilineal antisimétrica). *1.1 Sea V un espacio vectorial, con $\dim(V) = 2n + k$, con una forma bilineal antisimétrica Ω en él, existe una base $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, u_1, \dots, u_k$ de V tal que:*

$$\begin{aligned}\Omega(u_i, v) &= 0 \quad \forall v \in V \\ \Omega(v_i, v_j) &= \Omega(w_i, w_j) = 0 \quad \forall i, j \\ \Omega(v_i, w_j) &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

Demostración. La prueba consiste en el proceso de Gram-Schmidt con la ortogonalidad dada por la forma simpléctica. Sea el conjunto de ortogonales a todo $v \in V$, lo denotamos como $U = \{u \in V : \Omega(u, v) = 0 \quad \forall v \in V\}$ y un complementario W :

$$V = U \oplus W.$$

Tomamos una base u_1, \dots, u_k de U . Por ser W el complemento de U , $\forall w_1 \in W \setminus \{0\} \quad \exists v_1 \in W \setminus \{0\}$ tal que $\Omega(v_1, w_1) \neq 0$. Bajo producto por escalar podemos considerar $\Omega(v_1, w_1) = 1$.

Definimos $W_1 = \text{span}\{v_1, w_1\}$ y su complementario en W , $W_1^\perp = \{w \in W : \Omega(w, v) = 0 \quad v \in W_1\}$. Esto define una suma directa de W , $W = W_1 \oplus W_1^\perp$, y luego procedemos reiteradamente hasta llegar a la dimensión.

Sea $v \in W_1 \cap W_1^\perp$, $v = a_1 v_1 + a_2 w_1$ se tiene:

$$\begin{aligned}\Omega(v, v_1) &= \Omega(a_1 v_1, v_1) + \Omega(a_2 w_1, v_1) = a_2 \\ \Omega(v, w_1) &= \Omega(a_1 v_1, w_1) + \Omega(a_2 w_1, w_1) = a_1\end{aligned}$$

Luego $v = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$. Y $W_1 \cap W_1^\perp = 0$. Por otro lado sea $v \in W$ con $\Omega(v, v_1) = a_1$ y $\Omega(v, w_1) = a_2$, se tiene:

$$\begin{aligned}
v &= v + a_1 w_1 - a_1 w_1 + a_2 v_1 - a_2 v_1 &= (v + a_1 w_1 - a_2 v_1) + (-a_1 w_1 + a_2 v_1) \\
\Omega(v + a_1 w_1 - a_2 v_1, v_1) &= \Omega(v, v_1) + \Omega(a_1 w_1, v_1) - \Omega(a_2 v_1, v_1) = 0 \\
\Omega(-a_1 w_1 + a_2 v_1, v_1) &= \Omega(-a_1 w_1, v_1) + \Omega(a_2 v_1, v_1) = 0
\end{aligned}$$

Repetimos el proceso sobre el ortogonal. Sea $w_2 \in W_1^\perp$ y $v_2 \in W_1^\perp$ tal que $\Omega(v_2, w_2) = 1$. Definimos $W_2 = \text{span}\{v_2, w_2\}$ y repetimos. Llegará el momento, por tener dimensión finita, en el que el proceso pare. Y nos quedará:

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$$

como suma ortogonal simpléctica de W_i 's con base $\{v_i, w_i\}$ y $\Omega(v_i, w_i) = 1$

□

La dimensión del subespacio U es fija, es un invariante k , al igual que $2n$. Al mínimo $2n$ lo llamamos rango.

Dado que estamos trabajando con una forma bilineal en un espacio vectorial, podemos obtener un morfismo entre V y su dual V^* de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
V &\rightarrow V^* \\
v &\mapsto \Omega(v, \cdot)
\end{aligned}$$

A veces a esta aplicación se le cambia el signo. El núcleo de la aplicación es el conjunto de los vectores ortogonales a todos, V^\perp . Nosotros sólo consideraremos el caso de que V sea de dimensión finita. Que este sea 0 es equivalente a que la aplicación sea un isomorfismo entre V y V^* (siendo inyectiva y ambos de la misma dimensión es isomorfismo), ó a que Ω sea una forma simpléctica (ya no será degenerada).

En este caso $\dim(\text{Ker}(V \rightarrow V^*)) = 0$ y $2n = \dim(V)$, y todo espacio simpléctico (V, Ω) tendrá dimensión par.

A toda forma bilineal Ω , en un espacio vectorial V , se le puede asociar una matriz dada por los valores de una base, e_1, \dots, e_n , como entradas:

$$A_{ij} = \Omega(e_i, e_j)$$

Además en el caso de (V, Ω) espacio simpléctico por el teorema de forma estándar () se puede tomar una base simpléctica, $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ tal que:

$$\begin{aligned} \Omega(v_i, w_j) &= \delta_{ij} \quad \text{y} \quad \Omega(v_i, v_j) = \Omega(w_i, w_j) = 0 \\ \Omega(u, v) &= [-u-] \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con u y v en coordenadas de la base.

DEFINICIÓN 4. *Simplectomorfismo:* entre dos espacios simplécticos (V_1, Ω_1) y (V_2, Ω_2) es un isomorfismo $\varphi: V_1 \simeq V_2$ que conserva la forma simpléctica, esto es:

$$\varphi^* \Omega_2 = \Omega_1$$

En tal caso se dice que (V_1, Ω_1) y (V_2, Ω_2) son **simplectomorfos**

El prototipo de espacio simpléctico de dimensión $2n$ es $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$, con Ω_0 está definida con base simpléctica:

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1, v_2 = e_2, \dots, v_n = e_n \\ w_1 &= e_{1+n}, w_2 = e_{2+n}, \dots, w_n = e_{2n} \end{aligned}$$

siendo los e_i la base canónica.

Por el teorema de forma estándar () todo espacio simpléctico (V^{2n}, Ω) es simplectomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ por un isomorfismo que lleve la base simpléctica en (V^{2n}, Ω) a la canónica en $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$.

1.2. Subespacios de un espacio vectorial simpléctico

Sea $W \subset V$ un subespacio del espacio vectorial V con una forma antisimétrica, Ω , podemos restringir la forma a través de la inclusión $i : W \hookrightarrow V$ y considerar la forma $i^*\Omega = \Omega|_W$ en W . En el caso simpléctico clasificaremos algunos subespacios posibles en función según su ortogonal en V . Su relación con $\text{Ker}(V \rightarrow V^*)$ se ve en el siguiente resultado.

Proposición 1.2.1. *(V, Ω) espacio vectorial y forma antisimétrica, con W subespacio. Se verifica:*

$$\text{Ker}(W \rightarrow W^*) = W \cap W^\perp.$$

Demostración. Que $e \in \text{Ker}(W \rightarrow W^*)$ equivale a que $e \in V$ y $\forall w \in W$ se tiene $\Omega(e, w) = 0$. Entonces $e \in W^\perp$.

Si $e \in W \cap W^\perp$ entonces $\forall v \in V$ se tiene $\Omega(e, v) = 0$, entonces $e \in \text{Ker}(W \rightarrow W^*)$. \square

Según la restricción de Ω , en (V, Ω) espacio vectorial simpléctico, al subespacio W y usando la proposición anterior, distinguimos entre:

1. W es **simpléctico** si $\Omega|_W$ es no degenerada, ó equivalente $W \cap W^\perp = 0$.
2. W es **isotrópico** si $\Omega|_W \equiv 0$, esto es, $W \subset W^\perp$.
3. W es **coisotrópico** cuando su ortogonal simpléctico W^\perp es isotrópico, ó equivalente $W^\perp \subset W$.
4. W es **lagrangiano** si es coisotrópico e isotrópico a la vez, esto es, $W^\perp = W$.

Veamos ahora algunas de las propiedades de estos subespacios (hay otros posibles). Consideremos siempre (V, Ω) un espacio simpléctico, menos que se indique lo contrario.

Lema 1. *Sea W subespacio de (V, Ω) . Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$.
2. $(W^\perp)^\perp = W$.
3. W es lagrangiano $\Leftrightarrow \dim(W) = \frac{1}{2}$ y coisotrópico $\Leftrightarrow \dim(W) = \frac{1}{2}$ e isotrópico.

- Demostración.* 1. Por ser (V, Ω) simpléctico ρ es isomorfismo. Podemos identificar W^\perp con W° , el anulador de W en V^* . Este tendrá la dimensión complementaria de W en V y $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$
2. Si $z \in W$ por definición de W^\perp , $z \in (W^\perp)^\perp$, $\Omega(z, w) = 0 \quad \forall w \in W^\perp, z \notin W^\perp$. Luego $(W^\perp)^\perp = W$.
3. Es directo de lo anterior y la definición de lagrangiano.

□

1.3. Variedades simplécticas.

DEFINICIÓN 5. *forma simpléctica:* en una variedad M es una dos forma diferencial, $\omega \in \Omega^2(M)$, cerrada y tal que ω_p es simpléctica $\forall p \in M$.

Que la forma sea cerrada implica que es de De Rham, esto es, que varía suavemente y está en $T_x M$. También cabe destacar que $\dim(T_x M) = \dim(M)$ y por tanto $\dim(M)$ es par

DEFINICIÓN 6. *Variedad simpléctica:* es la dupla (M, ω) donde M es una variedad y ω una forma simpléctica en ella.

Cuando trabajamos con variedades simplécticas siempre estamos tratando de variedades de dimensión par y orientables. Esto último se tiene por ser ω^n una forma volumen. A continuación damos algunos resultados directos de la definición y algunos ejemplos. Más adelante veremos algunos más.

DEFINICIÓN 7. *Simplectomorfismo:* entre dos variedades simplécticas (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) , de igual dimensión, es un difeomorfismo $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ y tal que conserva la estructura simpléctica de las variedades, esto es:

$$\varphi^* \omega_2 = \omega_1$$

Dado que conservan las formas simplécticas también conservarán ω^n . En particular los simplectomorfismos son difeomorfismos que conservan el volumen.

Vimos que en una estructura simpléctica el único invariante era la dimensión, pero en el caso de las variedades esto se reduce a algo local, que se verá más adelante como consecuencia del teorema de Darboux. Por tanto cuando trabajamos con variedades simplécticas

localmente es útil pensar que estamos en \mathbb{R}^{2n} con coordenadas lineales $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ y la forma canónica ω_{CAN} , definida:

$$\omega_{CAN} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Proposición 1.3.1. *Si (M^n, ω) es una variedad simpléctica y compacta, se tiene:*

1. $H^2(M, \mathbb{R}) \neq 0$.
2. $H^j(M, \mathbb{R}) \neq 0 \quad \forall 0 \leq j \leq n$.

Demostración. 1. Supongamos que el segundo grupo de cohomología de De Rham es nulo. Tomamos $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $d\alpha = \omega$. $\omega^n = d(\alpha \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega)$ será una forma volumen y exacta a la vez, llegando así a una contradicción.

2. Razonamos igual para $\omega^k = d\alpha$ con $\alpha \in \Omega^1(M)$ se tiene que $\omega^n = d(\alpha \wedge \omega^{n-k})$ será volumen y exacta y volvemos a la misma contradicción.

□

A continuación vamos a ver la generalización de que todos los espacios simplécticos de la misma dimensión son simplectomorfos. Este es un hecho muy característico de la geometría simpléctica, ya que a diferencia de otras geometrías, como la riemanniana, dos variedades simplécticas de la misma dimensión son localmente simplectomorfas. Esto nos permite con frecuencia trabajar localmente con $(\mathbb{R}^{2n}, (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n))$, y con la forma $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. Las coordenadas locales en las que toma dicha forma se llaman **coordenadas simplécticas o estandar**. Esta generalización del caso lineal se conoce como teorema de Darboux. La prueba de este se basa en la versión relativa del teorema de Moser. Este se demuestra por un argumento muy común en simpléctica llamado el truco de Moser, pero nos saltaremos su prueba.

Teorema 1.3.2 (Teorema relativo de Moser). *Sea M con dos formas simplécticas definidas en ellas ω_0 y ω_1 , y N una subvariedad compacta de M . Si $\forall p \in N \quad \omega_0(p) = \omega_1(p)$, entonces existen entornos tubulares U_0 y U_1 de N , y $\varphi : U_0 \rightarrow U_1$ difeomorfismo, tal que: $\varphi^* \omega_1 = \omega_0$ y el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\varphi} & U_1 \\ i_0 \nwarrow & & \nearrow i_1 \\ & N & \end{array}$$

siendo $N \xrightarrow{i_0} U_0$ y $N \xrightarrow{i_1} U_0$ las inclusiones correspondientes

EL truco de Moser se usa para probar que entre dos formas simplécticas en una variedad existe una familia de formas simplécticas suave que las une. Para ello se tiene que pedir que tengan la misma clase de cohomología de De Rham, lo que aquí nos viene dado por coincidir en N .

Teorema 1.3.3 (Teorema de Darboux). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica $2n$ -dimensional. $\forall p \in M$, existe una carta en un entorno del punto, $(U, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$, tal que la forma simpléctica tiene la forma*

$$\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

ésta se suele llamar **carta de Darboux**.

Demostración. La prueba consiste en usar Moser relativo con $N = p$. Tomemos una base en $T_p M$ $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ tal que nos dé en un entorno de p las coordenadas $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x'_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_{n-1}, y'_n)$ en las que

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n dx'_i \wedge dy'_i|_p$$

Ahora aplicamos Moser relativo a ω y $\omega' = \sum_{i=1}^n dx'_i \wedge dy'_i$, que coinciden en p . Por este teorema se tiene que existen U_0 y U_1 y un difeomorfismo $\varphi : U_0 \rightarrow U_1$ tal que $\varphi(p) = p$ y

$$\varphi^* \left(\sum_{i=1}^n dx'_i \wedge dy'_i \right) = \omega$$

Se tiene: $\varphi^* (\sum_{i=1}^n dx'_i \wedge dy'_i) = (\sum_{i=1}^n d(x'_i \circ \varphi) \wedge d(y'_i \circ \varphi))$. Estas nuevas coordenadas nos dan localmente, en U_0 , la forma simpléctica como queríamos.

□

1.4. Introducción a grupos y álgebras de Lie.

En ésta sección definiremos lo que es un grupo de Lie, un álgebra de Lie y enunciaremos algunos teoremas de teoría clásica de Lie, sin demostración. Para nuestro objetivo nos es suficiente con considerar los casos reales y de dimensión finita.

Un grupo de Lie real no es más que un grupo con estructura de variedad diferencial. Obviamente tiene que haber un lazo entre ambas que haga compatibles las estructuras, éste viene dado al pedir que la inversión y el producto sean las dos aplicaciones diferenciables, es decir, suaves.

DEFINICIÓN 8. Grupo de Lie: es un grupo G tal que tiene estructura de variedad diferencial y se cumple que:

1. La inversión: $a \mapsto a^{-1} \forall a \in G$
2. El producto por un elemento $a \in G$: $b \mapsto ab \forall b \in G$

son funciones suaves

DEFINICIÓN 9. Álgebra de Lie real: es un espacio vectorial, \mathfrak{g} , con una operación bilineal $\{\cdot, \cdot\} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. Es antisimétrica: $\forall X, Y \in \mathfrak{g} \{X, Y\} = -\{Y, X\}$.
2. Cumple la identidad de Jacobi: $\{X\{Y, Z\}\} + \{Z\{X, Y\}\} + \{Y\{Z, X\}\} \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

Las notaciones \mathfrak{g} ó $Lie(G)$ son tomadas con frecuencia para designar al álgebra asociada a un grupo. A partir de un grupo de Lie podemos sacar su álgebra de Lie, esto es la versión infinitesimal de dicho grupo de Lie. EL álgebra de Lie de un grupo contiene localmente toda la información sobre la estructura del grupo. De ahí la relación entre ambos.

Sea la **traslación a la izquierda** $L_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto gh \forall h \in G$. Llamamos vectores invariantes por la izquierda a aquellos invariantes por esta aplicación, esto es, $X \in \chi(M)$ tal que $dL_g \circ X = X \circ L_g \forall$. No es difícil comprobar que el conjunto de vectores por la izquierda forma con el corchete de Lie de los vectores de la variedad un álgebra de Lie. Además la aplicación $T_e G \rightarrow Lie(G)$, $v \mapsto dL_g(v)$ nos da un isomorfismo entre el espacio tangente al neutro y álgebra de Lie del grupo.

Sabemos que a cada grupo de Lie le corresponde un álgebra de Lie, pero no si al revés también es cierto. Para ello se tiene el siguiente teorema de Lie que fue completado por Cartan.

Teorema 1.4.1. Cartan–Lie *Para toda álgebra de Lie real finito dimensional, \mathfrak{g} , existe un grupo Lie real, G , tal que $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Y además al restringirnos a los grupos de Lie reales simplemente conexos se tiene una biyección entre estos grupos y las álgebras reales finito dimensionales.*

Dado un morfismo entre dos grupos de Lie, al tomar la diferencial en el neutro se obtiene siempre un morfismo de álgebras. Lo que no es cierto siempre es el contrario, pero se tiene el segundo teorema de Lie.

Teorema 1.4.2. Segundo Teorema de Lie *Sean G y H , dos grupos de Lie con álgebras \mathfrak{g} y \mathfrak{h} . Si suponemos que G es simplemente conexo, para todo morfismo de álgebras de Lie $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ existe un morfismo de grupos $\phi : G \rightarrow H$ del que Φ es un levantamiento. Esto es, conmuta con las exponenciales, $\phi \circ \exp_G = \exp_H \circ \Phi$ y se tiene que $d_e \phi = \Phi$*

Otro resultado que se usará más adelante nos dice que un gran número de las álgebras de Lie se pueden trabajar como grupos matriciales, lo que por ejemplo nos simplifica la expresión de la exponencial. Entre ellas están las nuestras, las álgebras de Lie reales y finito dimensionales.

Teorema 1.4.3. Teorema de Ado *Toda álgebra de Lie sobre un cuerpo de característica cero y de dimensión finita se puede embeber dentro de un álgebra de Lie matricial.*

Por último un criterio que nos facilita decir que un subgrupo de Lie sea un grupo de Lie.

Teorema 1.4.4. Teorema de Cartan *Todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie es un grupo de Lie.*

1.5. Estructuras complejas

Existe una estrecha relación entre la geometría simpléctica y la compleja, por medio de las estructuras complejas compatibles. En un espacio vectorial complejo el producto por i , la unidad imaginaria, es un endomorfismo tal que su cuadrado da $-Id$. Una generalización de esto es la estructura compleja. Además el concepto de estructura compleja compatible nos entrelazará en la variedad los conceptos de métrica, forma simpléctica y estructura compatible de tal forma que dos de ellos determinan al tercero, pero no determinado de forma unívoca.

DEFINICIÓN 10. Estructura compleja: *en V es un endomorfismo $J : V \rightarrow V$ tal que:*

$$J^2 = -Id.$$

El par (V, J) es llamado **espacio complejo**

Todo espacio complejo (V, J) tiene dimensión par. Esto se ve tomando determinantes, ya que nos sale $\det(J)^2 = (-1)^{\dim(V)}$.

Ejemplo 1. El ejemplo más sencillo es considerar \mathbb{R}^{2n} , ó lo que es lo mismo \mathbb{C}^n , tomando como estructura compleja $J_0(e) = ie$ ó de forma matricial para \mathbb{R}^{2n} :

$$\begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$$

Para ver la relación a partir de los espacios simplécticos tomemos $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ coordenadas lineales simplécticas, en \mathbb{R}^{2n} . Y dotémoslo además de forma simpléctica canónica y métrica euclídea:

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

$$g_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Visto en forma matricial en la base, nos queda:

$$J_0(u) = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}$$

$$\omega_0(u, v) = (-v-)^t \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}$$

$$g_0(u, v) = (-v-)^t \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ u \\ | \end{pmatrix}$$

La relación entre las tres se puede expresar como sigue:

$$\omega_0(u, v) = g_0(J_0(u), v)$$

Esta última relación nos lleva al concepto de compatibilidad. En un espacio pueden existir muchas estructuras complejas, a nosotros nos interesa que estén relacionadas con Ω

DEFINICIÓN 11. *Estructura compleja compatible:* para un espacio vectorial simpléctico, (V, ω) , es una estructura compleja, J , tal que:

$$g_J(u, v) = \Omega(u, J(v)), \quad \forall u, v \in V$$

es un producto interno en V .

El que sea una estructura compleja compatible es equivalente a que conserve la forma simpléctica ($\Omega(u, v) = \Omega(J(u), J(v)) \quad \forall u, v \in V$), esto es que sea simplectomorfismo, y $\Omega(u, J(v)) > 0 \forall u, v \in V - \{0\}$. Aun que no se pueda tener la unicidad, si se puede ver la existencia de estructura compleja compatible para un espacio simpléctico.

Proposición 1.5.1. Sea (V, Ω) un espacio vectorial simpléctico, siempre existe una estructura simpléctica compatible con Ω .

Demostración. Tomamos una base simpléctica $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, y definimos J tal que:

$$J(q_i) = p_i, \quad J(p_i) = -q_i$$

Esto nos da que J es isomorfismo y $J^2 = -Id$. La base $\{J(p_i), J(q_i)\}$ es también canónica y J isomorfismo simpléctico.

□

Esta prueba depende de la base tomada. Podemos construir estructuras complejas sin necesidad de fijar base y además se ve mejor el concepto de compatibilidad.

Tomamos producto interno positivo cualquier g en V . Existe una única aplicación lineal $A : V \rightarrow V$ tal que:

$$g(A(u), v) = \Omega(u, v).$$

Y esta además cumple $A^* = -A$.

$$g(A^*u, v) = g(u, Av) = \Omega(v, u) = -\Omega(u, v) = \Omega(u, v) = g(-Au, v)$$

Si $A^2 = -Id$ hemos terminado. En caso contrario descomponemos como sigue. Se tiene que AA^* es simétrica y positiva. Tiene por tanto una factorización,

$$AA^* = B \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) B^{-1}$$

,con λ_i 's los autovalores. Tomamos raíces y nos queda $\sqrt{AA^*}$, que es definida positiva y simétrica. Ahora tomamos la descomposición polar de A , $A = \sqrt{AA^*}J$, con $J = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$. No es difícil comprobar que esta J resultante se una estructura compleja compatible con Ω .

Así dado una g y una Ω tenemos una J inducida. Y también se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.5.2. *Sea (V, Ω) un espacio simpléctico con una estructura compleja que sea symplectomorfismo, J , la aplicación*

$$\begin{aligned} g : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \Omega(u, J(v)) \end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica.

Como la forma simpléctica es no degenerada, también lo será la g definida. Y si se pide (1.5), entonces es un producto interno.

A partir de Ω y una estructura compatible, J , podemos sacar una métrica g . De hecho a partir de dos elementos de una terna de forma simpléctica, estructura compleja compatible y métrica, (Ω, J, g) , podemos sacar un tercero. Esto no significa que si a partir de un par (Ω, g) usado en el procedimiento anterior de una J tal que luego con (Ω, J) podamos recuperar g . Por lo general la g obtenida por $\Omega(u, J(v))$ no coincidirá con la usada para obtener J .

Pasemos a generalizar lo anterior a nivel de variedades simplécticas.

DEFINICIÓN 12. Estructura casi compleja: *en una variedad M es una aplicación suave que a cada punto le asigna una estructura compleja en el tangente:*

$$\begin{aligned}
J : M &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(T_x M) \\
x &\longmapsto J_x : T_x M \rightarrow T_x M \\
u &\mapsto J_x(u), \quad \text{con} \quad J_x^2(u) = -Id
\end{aligned}$$

,esto es un campo de estructuras complejas en M . A (M, J) se lo llamaremos **variedad casi compleja**.

DEFINICIÓN 13. Estructura casi compleja compatible: Es una variedad simpléctica (V, ω) con una estructura casi compleja tal que g definida

$$\begin{aligned}
x &\longmapsto g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto g_x(u, v) = \omega_x(u, J(v))
\end{aligned}$$

es una métrica riemanniana. El triplete (ω, g, J) se llama **Triplete compatible** cuando $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J(\cdot))$.

Proposición 1.5.3. Sea (M, ω) variedad simpléctica y g métrica en M . Entonces existe una estructura casi compleja compatible J en M .

Demostración. Es como el caso lineal pero haciéndolo de forma suave. Una vez elegida una métrica la descomposición polar (1.5) es única. Siendo esta métrica suave en M la construcción vale para una J suave en M . \square

Veamos ahora que las posibles estructuras complejas compatibles para una variedad simpléctica dada no pueden ser demasiado distintas unas de otras.

Proposición 1.5.4. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y J_0 y J_1 dos estructuras compatibles con ella. Entonces $\exists J_t, \forall 0 \leq t \leq 1$, familia suave de estructuras complejas compatibles que lleva J_0 a J_1 .

Demostración. Tomando las dos métricas correspondientes por compatibilidad, g_{J_0} y g_{J_1} , y hacemos una combinación convexa

$$g_{J_t}(\cdot, \cdot) = (1 - t)g_{J_0}(\cdot, \cdot) + tg_{J_1}(\cdot, \cdot)$$

que nos da una familia suave de métricas. Y aplicando la descomposición polar obtenemos una familia de J_t 's compatibles uniendo J_0 a J_1 .

□

Corolario 1.5.5. *El conjunto de estructuras casi complejas compatibles en una variedad simpléctica es conexo por caminos.*

1.6. Grupo simpléctico

Volvamos otra vez a los espacio simplécticos para definir $Sp(V)$. Toda forma simpléctica nos define una forma volumen. Todo endomorfismo que conserva una forma simpléctica conservará también el volumen canónico. Un tal endomorfismo tendrá determinante uno y será isomorfismo. Y por tanto, siendo un isomorfismo que conserva la forma simpléctica se tiene que es un symplectomorfismo.

Al conjunto de dichos symplectomorfismos en V lo denotamos $Sp(V)$. Es claro que es un grupo. Vimos antes que todos los espacios simplécticos de la misma dimensión son symplectomorfos y podemos trabajar como en $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$. Lo mismo pasa con $Sp(V)$, Así que nos referiremos al grupo simpléctico de una espacio de dimensión $2n$ como $Sp(2n)$.

Para poder trabajar con $Sp(2n)$ con más facilidad lo miramos como un grupo matricial. Que sea $\varphi : V \rightarrow V$ un symplectomorfismo, con matriz asociada A , equivale a $\Omega(\varphi(u), \varphi(v)) = \Omega(u, v)$, que visto en forma matricial nos da:

$$AJ_0A^t = J_0 \quad \text{con} \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Por tanto podemos definir el grupo simpléctico matricialmente como las matrices $2n \times 2n$ que cumplen la ecuación 1.1. Este grupo matricial es además un grupo de Lie con su correspondiente álgebra como vemos a continuación.

Proposición 1.6.1. *$Sp(2n)$ es un grupo de Lie de dimensión $n(2n + 1)$.*

Demostración. $Sp(2n)$ es un subgrupo de $Gl(2n)$. La identificación matricial se hace igualando a constantes funciones diferenciables. Luego además de subgrupo es cerrado. Por el teorema de Cartan se tiene que es un grupo de Lie. La dimensión coincide con la del tangente, que veremos ahora con el álgebra de Lie. □

El álgebra de Lie de $Sp(2n)$ es $sp(2n) = \{M \in GL(n) : J_0 M^t + M J_0 = 0\}$. Esto se ve fácilmente tomando una curva $I + tM$ y tomando la derivada en 0 de la fórmula 1.1.

Ya en capítulo anterior hicimos una identificación entre J_0 y el producto por la unidad compleja. Identificando la matriz compleja $X + Yi$ con la real $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ vemos como se relacionan los subgrupos de $GL(2n, \mathbb{R})$: $Sp(2n)$, $O(2n)$, $GL(n, \mathbb{C})$ y $U(n)$.

Proposición 1.6.2.

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n) = U(n)$$

Demostración. La pertenencia cada uno de estos grupos lo podemos expresar matricialmente. Para $Sp(2n)$ teníamos $M J_0 M^t = J_0$. Para los otros dos:

$$\begin{aligned} M \in GL(n, \mathbb{C}) &\iff M J_0 = J_0 M \\ M \in O(2n) &\iff M^t M = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Calculando un poco con matrices sale que cuales quiera dos implican al tercero. Tomemos el caso $Sp(2n) \cup O(2n)$. Si $M \in Sp(2n)$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ tal que } A^t C = C^t A, B^t D = D^t B, A^t D - C^t B = \mathbf{1}$$

teniendo para nuestro caso

□

Capítulo 2

Acciones en variedades simplécticas

En éste capítulo consideraremos las acciones en variedades, y dentro de ellas las que conservan la estructura simpléctica. Para ello empezaremos viendo los campos que conservan esta estructura y que nos servirán para ver si lo hacen las acciones, los campos simplécticos. De entre ellos destacan los hamiltonianos, a los que exigiremos algo más; veremos que en realidad los campos simplécticos no son más que aquellos que localmente son hamiltonianos, y al restringirnos a estos últimos las acciones que les asociamos (con algún requisito más) son muy valiosas. A partir de ellas podemos construir nuevas variedades simplécticas (reducción), ver las simetrías de un sistema mecánico clásico ó dar una foliación en variedades simplécticas del dual de un álgebra de Lie.

2.1. Campos Hamiltonianos

En este capítulo consideraremos siempre que estamos trabajando una variedad simpléctica (M, ω) . Denotaremos como $\chi(M)$ los campos suaves en M , así como Ω^n serán nuestras n -formas. En esta primera sección definiremos los conceptos de campo simpléctico y hamiltoniano, que juegan un papel importante en las acciones en variedades simplécticas y en los sistemas integrables en mecánica. El primero se refiere a aquellos campos que conservan la forma simpléctica, es decir, un campo X tal que $\mathcal{L}_X \omega = 0$. La variación de la forma simpléctica es nula a lo largo de las curvas integrales de X . En el caso de que su flujo este definido globalmente (M sea compacta o completa) este será un symplectomorfismo de M en sí misma.

El segundo supone un caso particular del anterior, si a caso más importante. Siempre que tengamos definida una forma bilineal no degenerada, ya sea una forma simpléctica ó una métrica, en un espacio vectorial la aplicación definida a continuación nos dará un isomorfismo con su dual. Igual que hicimos a nivel de álgebra lineal definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \varrho : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longmapsto i_X \omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

En cada punto esta aplicación es la que definimos a nivel lineal para ω_x . Vimos que era un isomorfismo. Luego la nueva será un isomorfismo punto a punto y por tanto también globalmente. Además de un isomorfismo lineal sobre \mathbb{R} , si tomamos una función $f \in C^\infty(M)$ se tiene que $\rho(f \cdot X) = f \cdot \rho(X)$, siendo un morfismo de $C^\infty(M)$ -módulos.

Por tanto, usando la inversa, a cada 1-forma α le asignamos X_α , el campo que por ϱ nos da α . En caso que $\alpha = df$, al campo X_{df} , que denotamos X_f , será el **campo hamiltoniano** de la función f , y a esta su **función hamiltoniana**. Por ser isomorfismo la aplicación 2.1 a cada f le corresponde un único X_f , pero a la inversa f no será única, ya que bajo suma por constante df queda invariante.

Veamos ahora cómo se comportan estos campos. Tomemos una función $f \in C^\infty(M)$ y su campo hamiltoniano X_f . Supongamos que X_f es completo y podemos tomar su flujo $\rho : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Este nos da un grupo uniparamétrico de difeomorfismos que cumple:

$$\begin{cases} \rho_0 &= Id_M \\ \frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho^{-1} &= X_f \end{cases}$$

Veamos que la forma simpléctica no varía a lo largo de las curvas integrales. Aplicando la fórmula de Cartan,

$$\frac{d}{dt} \rho_t^* \omega = \rho_t^* \mathcal{L}_{X_f} \omega = \rho_t^* (di_{X_f} \omega + i_{X_f} d\omega) = 0.$$

La última igualdad se obtiene de $di_{X_f} \omega = d \circ d(f)$. Es equivalente que $i_{X_\alpha} \omega$ sea una forma cerrada a que ω no varíe con su flujo. Este caso es el de los campos simplécticos ($\mathcal{L}_{X_\alpha} = \frac{d}{dt} \rho_t^* \omega = 0$). Esto nos permite definir los campos Simplécticos y hamiltonianos como sigue.

DEFINICIÓN 14. Campos simpléctico: $X_\alpha \in \chi(M)$ tal que cumple una de las tres afirmaciones equivalentes:

1. $\mathcal{L}_{X_\alpha}\omega = 0$
2. El flujo de X_α , ρ_t , preserva ω . En caso de que este definido globalmente el flujo, nos da una familia de symplectomorfismos.
3. $i_{X_\alpha}\omega$ es una forma cerrada.

Todas estas afirmaciones son también ciertas para los campos hamiltonianos que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 15. Campos hamiltonianos: $X_\alpha \in \chi(M)$ tal que cumple una de las dos afirmaciones equivalentes:

1. $i_{X_\alpha}\omega$ es una forma exacta.
2. $i_{X_\alpha}\omega = df$ para alguna $f \in C^\infty(M)$. Siendo f llamada su **función hamiltoniana**

Observación 1. Los campos hamiltonianos preservan sus funciones hamiltonianas.

$$\mathcal{L}_{X_f}f = i_{X_f}df = i_{X_f}i_{X_f}\omega = 0$$

Luego las funciones hamiltonianas son constantes en cada curva integral de X_f , es decir, cada $\rho_t(p) \quad \forall p \in M$ está contenida en un conjunto de nivel de f : $f(p) = (\rho_t^*f)(p) = f(\rho_t^*(p))$

Observación 2. A veces a los simplécticos se los denomina localmente hamiltonianos. Esto no es una idea muy descabellada si miramos su relación a través de la Cohomología de De Rham. Si $H_{DR}^1(M) = 0$ todas las 1-formas cerradas son automáticamente exactas y por tanto todo campo simpléctico es hamiltoniano. Localmente toda variedad tiene un abierto en el que se da este caso, luego siempre podemos pensar que para un entorno ambos tipos de campo coinciden.

Pasamos a ver ahora la relación que se establece entre estos campos y la mecánica, para luego dar paso a su relación con el corchete de Poisson.

La construcción de un campo hamiltoniano tiene como análogo el gradiente, $grad(f)$, en geometría riemanniana. Tomando una métrica g en M y la aplicación, $\nu : \chi(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, $X \mapsto i_X(g)$, definimos $grad(f) = \nu^{-1}(df)$.

Localmente podemos pensar en una variedad simpléctica como $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{CAN})$ por el teorema de Darboux. Tomando una parametrización local, $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ en una variedad simpléctica (M, ω) , con la aplicación 2.1 en el caso simpléctico se obtiene los siguientes resultados.

Proposición 2.1.1. *Se cumple*

$$\varrho\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = -dq_i, \quad \varrho\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right) = dp_i$$

Demostración.

$$i_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \left(\sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i \right) = \sum_{i=1}^n i_{\frac{\partial}{\partial p_i}} (dq_i) \wedge dp_i - dq_i \wedge i_{\frac{\partial}{\partial p_i}} (dp_i) = -dq_i$$

Es igual para el otro. □

Saquemos ahora con lo anterior una expresión de X_f en función de f .

$$X_f = \varrho^{-1}(df) = \varrho^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (2.2)$$

En coordenadas canónicas X_f se puede calcular mediante el productora matricial $X_f = Jdf$. Esta expresión da lugar a un sistema dinámico conocido como ecuaciones Hamilton, que son al fin y al cabo el sistema que da las curvas integrales $\rho_t = (q(t), p(t))$ de X_f .

$$2.6 \quad \begin{cases} \frac{\partial q_i}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial p_i}{\partial t}(t) = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \end{cases}$$

Estas ecuaciones aparecen con frecuencia en la mecánica. Como en el hamiltoniano de la energía con las leyes de Newton.

Para el caso del gradiente de $f \in C^\infty(M)$ en las coordenadas canónicas de la métrica g , compatible, se obtiene

$$grad(f) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

Sea J la estructura casi compleja estándar tal que $J(\frac{\partial}{\partial q_i}) = \frac{\partial}{\partial p_i}$ y $J(\frac{\partial}{\partial p_i}) = -\frac{\partial}{\partial q_i}$, sacamos $J(X_f) = grad(f)$.

Pasamos a definir el corchete de Poisson y la relación entre los campos hamiltonianos y simplécticos como subálgebras de Lie. Buscamos un álgebra que nos dé información sobre estos campos y/ó la estructura como variedad simpléctica dada por ω .

Pasemos ahora a definir un álgebra sobre las funciones $C^\infty(M)$ por medio de la forma simpléctica.

DEFINICIÓN 16. Corchete de Poisson: Sean dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$, el corchete de Poisson será definido como la función

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$$

Esta expresión puede aparecer cambiada de signo según como se tome la forma simpléctica en el espacio de fases. La expresión anterior puede ser expresada de formas equivalentes que usaremos según nos convenga.

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = i_{X_f}\omega(\cdot, X_g) = i_{X_f}(dg) = X_f(g)$$

El corchete de Poisson es local. Este se puede restringir a cualquier abierto ó usarlo en gérmenes de funciones. Por la ecuación 2.2 podemos expresarlo localmente como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Ahora veremos una proposición que esclarece un poco más la relación con los campos hamiltonianos. Y después que este corchete realmente nos define un álgebra de Lie, y no sólo eso si no que es también un álgebra de Poisson. Ambas unidas nos dan un morfismo de álgebras.

Proposición 2.1.2. Si $X, Y \in \chi^{Sym}(M)$, campos simplécticos en M , en una variedad simpléctica (M, ω) , entonces $[X, Y]$ será un campo hamiltoniano. Y además, gracias a ser ω cerrada, se puede ver que $\omega(Y, X)$ será una de sus funciones hamiltonianas.

Demostración. La prueba se basa en la siguiente fórmula de Cartan

$$i_{[X, Y]}\alpha = \mathcal{L}_X i_Y \alpha - \mathcal{L}_Y i_X \alpha = [\mathcal{L}_X, i_Y]\alpha, \quad \forall \alpha \text{ forma diferencial.}$$

Al igual que el resto de fórmulas de Cartan se demuestra para funciones y 1-formas y de ahí por linealidad para todo grado. En nuestro caso, siendo ω cerrada se simplifica obteniendo:

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= \mathcal{L}_X i_Y \omega - \mathcal{L}_Y i_X \omega \\ &= di_X i_Y \omega + i_X di_Y \omega - i_Y di_X \omega - i_Y i_X d\omega \\ &= d(\omega(Y, X)) \end{aligned}$$

□

Esto nos da la relación $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$

DEFINICIÓN 17. Álgebra de Poisson: Es un álgebra de Lie $(\mathbf{P}, \{\})$, que además cumple la regla de Leibniz, esto es:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

Proposición 2.1.3. El corchete de Poisson sobre las funciones suaves nos da un álgebra de Poisson $(C^\infty(M), \{\})$ de dimensión infinita.

Demostración. La antisimetría es directa de la forma simpléctica, al igual que el ser una forma bilineal.

Para la ecuación de Jacobi desglosamos los tres términos que aparecen en ella

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= X_f(\{g, h\}) = X_f(X_g(h)) \\ \{g, \{h, f\}\} &= X_g(\{h, f\}) = -X_g(X_f(h)) \\ \{h, \{f, g\}\} &= X_{f,g}(h) = -[X_f, X_g](h) \end{aligned}$$

que sumados nos dan

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) - [X_f, X_g](h) = 0$$

Para terminar comprobamos la regla de Leibniz

$$\begin{aligned}
\{f, g \cdot h\} &= \omega(X_f, X_{g \cdot h}) \\
&= i_{X_f} d(g \cdot h) \\
&= i_{X_f} (d(g) \cdot h + d(h) \cdot g) \\
&= i_{X_f} (\omega(\cdot, X_g)h + \omega(\cdot, X_h)g) \\
&= \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}
\end{aligned}$$

□

De lo anterior obtenemos el siguiente antimorfismo (tal y como hemos definido el corchete, sino sería morfismo) de álgebras de Lie

$$\begin{aligned}
(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\}) &\longrightarrow (\chi(M), [\cdot, \cdot]) \\
f &\longmapsto X_f \\
\{\cdot, \cdot\} &\longmapsto [\cdot, \cdot]
\end{aligned}$$

Por otra parte restringiendo el corchete en los campos de la variedad a los simpléctico ($\chi^{Sym}(M)$), y los hamiltonianos ($\chi^{Ham}(M)$) y usando la proposición 2.1.2 obtenemos las siguientes inclusiones de álgebras y subálgebras de Lie.

$$(\chi^{Ham}(M), [\cdot, \cdot]) \subseteq (\chi^{Sym}(M), [\cdot, \cdot]) \subseteq (\chi(M), [\cdot, \cdot])$$

2.2. Acciones en variedades.

Empezaremos desde una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad M , que denotaremos como $G \curvearrowright M$ y a partir de ahí presentaremos la acción infinitesimal. Siempre sobreentenderemos que dicha acción es diferenciable.

Un ejemplo conocido de una de estas acciones es el de un campo completo, X , en la variedad. Siempre posemos integrar y obtener el flujo $\rho : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Fijando el punto, $p \in M$, nos da la curva integral que pasa por p en tiempo 0, esto es:

$$\begin{cases} \rho_0(p) = p \\ d \frac{\rho_t(p)}{dt} = X(\rho_t(p)) \end{cases}$$

Por otro lado si variamos sólo el t nos da una familia de difeomorfismos, $\rho_t : M \rightarrow M$, que es además un grupo uniparamétrico $\{\rho_t : t \in \mathbb{R}\}$, denotando con frecuencia $\exp(tX)\rho_t$ para indicar el campo. Es fácil ver que $\rho_t \circ \rho_s = \rho_{t+s}$ y $\rho_t^{-1} = \rho_{-t}$. Esto nos induce el morfismo de grupos

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (Dif(M), \circ) \\ t &\longmapsto \rho_t \end{aligned}$$

Como cada campo completo nos induce una acción de \mathbb{R} en M , y podemos sacar un campo completo de cada acción de \mathbb{R} , se obtiene la biyección

$$\begin{aligned} \{X \in \chi(M) \text{ completo}\} &\longrightarrow \{\mathbb{R} \curvearrowright M\} \\ X &\longmapsto \exp(tX) = \rho_t \\ X_p = \frac{d}{dt}_{t=0} \Psi_t(p) &\longmapsto \Psi_t \end{aligned}$$

Sea una acción $\Psi : G \curvearrowright (M, \omega)$. Si no se especifica ésta será una acción por la izquierda. Se puede ver como la evaluación $ev_\Psi : G \times M \rightarrow M$ tal que $(g, p) \mapsto \Psi(g, p) = \Psi_g(p)$, así como tomar el difeomorfismo dado por cada elemento del grupo

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow Dif(M) \\ g &\longmapsto \Psi_g(\cdot) \end{aligned}$$

dando así un morfismo de grupos. Sea $x \in M$ un punto fijo de la acción. Podemos tomar la diferencial de cada difeomorfismo $d\Psi_g : T_x M \rightarrow T_x M$ obteniendo la aplicación

$$\begin{aligned} d\Psi : G &\rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbb{R}}(T_x M) \\ g &\mapsto d\Psi_g \end{aligned}$$

Sea $G \curvearrowright M$ una acción y $X \in \mathfrak{g}$ podemos inducir por la acción un campo en la variedad.

DEFINICIÓN 18. Acción infinitesimal ψ : Sea una acción $\Psi : G \curvearrowright M$, de G un grupo de Lie. Esta nos define la siguiente acción infinitesimal:

$$\begin{aligned}\psi : \mathfrak{g} &\longrightarrow \chi(M) \\ v &\longmapsto v_M\end{aligned}$$

donde el campo inducido por la acción nos viene definido bajando por la exponencial de G , \exp_G , y viendo como varía el difeomorfismo en cada punto

$$v_M = \frac{d}{dt}_{t=0} \psi_{\exp_G(-tv)}(p) = \frac{d}{dt}_{t=0} (\exp_G(-tv) \circ p)$$

Esta aplicación será un morfismo de álgebras (antimorfismo al tomar t en lugar de $-t$) ya que $\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$. En la definición hemos incluido que G sea simplemente conexo, que no es necesario, pero esto nos permitirá por el segundo teorema de Lie hacer el camino contrario. Si tienes una acción infinitesimal $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \chi(M)$ y $\forall v \quad \psi(v)$ es completo entonces existe una acción $\Psi : G \times M \rightarrow M$ de la que proviene.

2.3. Acciones simplécticas y hamiltonianas.

A partir de ésta sección trabajaremos con variedades simplécticas (M, ω) . Definiremos las acciones simplécticas, las que conserva ω , y las hamiltonianas.

DEFINICIÓN 19. Acción simpléctica: es una acción diferenciable que preserva ω

$$\Psi : G \longrightarrow \text{Symplec}(M) \subset \text{Dif}(M).$$

esto es, actúa por symplectomorfismos.

Si tenemos una acción simpléctica la acción infinitesimal nos generará campos simplécticos.

$$\forall v \in \mathfrak{g} \quad \mathcal{L}_{v_M} \omega = \frac{d}{dt}_{t=0} (\rho_t^{v_M})^* \omega = \frac{d}{dt}_{t=0} \omega = 0.$$

Esto nos vuelve a dar una relación biunívoca entre campos simplécticos completos y acciones simplécticas de \mathbb{R} en (M, ω) .

A nosotros nos interesan aquellas acciones que nos den campos hamiltonianos, $v_M \in \chi^{\text{Ham}}(M)$. Como vimos no resulta descabellado restringirnos a este tipo de acciones, al fin

y al cabo localmente los dos tipos de campos son lo mismo. Estas acciones son precisamente aquellas en las que existe una aplicación momento. Definiremos el concepto por una construcción que en realidad es el de comomento para dar paso a la definición común, con la aplicación momento.

Dada la acción simpléctica $\Psi : G \curvearrowright (M, \omega)$, podemos tomar los morfismo de álgebras de Lie $\tau : (C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\}) \rightarrow (\chi(M), [\cdot, \cdot])$, $f \mapsto X_f$ y $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \chi^{Sym}(M)$, $v \mapsto v_M$.

DEFINICIÓN 20. Acción hamiltoniana: Es una acción simpléctica $\Psi : G \curvearrowright (M, \omega)$ para la cual existe un morfismo de álgebras $\mu^* : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$, que será la dual de la aplicación momento, tal que $\tau \circ \mu^* = \psi$. Esto es:

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow \chi^{Sym}(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ v &\longmapsto v_M = X_f \longmapsto f. \end{aligned}$$

Visto con la forma significa $i_{v_M}\omega = df$.

El que exista dicha aplicación no implica que la τ sea invertible, pero si nos dice que cada campo simpléctico proviene de una función. Luego una acción hamiltoniana es aquella simpléctica donde todos los campos generados por la infinitesimal son hamiltonianos. La aplicación μ^* es la **comomento** y su extraña notación proviene de ser la dual de la **momento** μ . Esta última se saca como dual de la comomento. Para cada $p \in M$ tomamos el elemento $e \in \mathfrak{g}^*$, tal que:

$$\langle e, v \rangle_p = \mu^*(v)(p) =: \mu^v(p) \quad \forall v \in \mathfrak{g}$$

Dejando variar el p se obtiene

$$\begin{aligned} \mu : M &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ p &\longmapsto e_p \end{aligned}$$

En la próxima definición usaremos la notación $\mu^v(p) = \langle \mu(p), v \rangle$. para referirnos al valor que toma el pairing entre un elemento de \mathfrak{g}^* , $\mu(p)$, y un vector v de \mathfrak{g} .

DEFINICIÓN 21. Aplicación momento: Sea $\Psi : G \curvearrowright (M, \omega)$ hamiltoniana. Es la aplicación $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ tal que:

1. $\forall v \in \mathfrak{g} \quad v_M = X_{\mu^v}$ (esto es, μ^v es la función hamiltoniana de v_M).
2. μ es G -equivariante: $\mu(\Psi_g(p)) = Ad_g^* \mu(p)$.

DEFINICIÓN 22. Aplicación comomento: Sea $\Psi : G \curvearrowright (M, \omega)$ una acción hamiltoniana. Es una aplicación $\mu^* : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M)$ tal que $\mu^*[X, Y] = \{\mu^*(X), \mu^*(Y)\}$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\tau} & \chi^{Sym}(M) \\
 \mu^* \swarrow & & \nearrow d\Psi \\
 & \mathfrak{g} &
 \end{array}$$

ó equivalente: $\mu^*(v) = \mu^v$ es la función hamiltoniana de v_M .

2.4. Representaciones adjunta y coadjunta

En ésta sección veremos dos tipos de representaciones frecuentes en geometría simpléctica. Más tarde las usaremos en la aplicación del teorema de convexidad del teorema de Schurs. Para empezar recordemos que es una representación. Sea G un grupo de Lie una **representación** en un espacio vectorial, V , es una acción $G \curvearrowright V$ por isomorfismos ó equivalente un morfismo de grupos $G \rightarrow GL(V)$.

Para todo grupo de Lie podemos tomar la acción suave por conjugación $G \curvearrowright G$.

$$\begin{aligned}
 \psi : G &\longrightarrow Dif(G) \\
 g &\longmapsto \psi_g \text{ donde } \psi_g(h) = ghg^{-1} = L_g \circ R_{g^{-1}}(h) \quad \forall h \in G.
 \end{aligned}$$

Para cada ψ tomamos la derivada en la neutro, a la que denotamos como $Ad_g = d_e \psi_g$. Y luego dejando variar la g se obtiene Ad .

$$\begin{aligned}
 Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) = GL(T_e G) \\
 g &\longmapsto Ad_g : T_e G \longrightarrow T_e G.
 \end{aligned}$$

Ad se conoce como **representación adjunta** y nos da una acción $G \curvearrowright \mathfrak{g}$. Si ahora hacemos la derivada en el neutro en G de la acción se obtiene $ad = d_e Ad$

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$$

definida por $(d_e Ad)(X)(w) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad(\exp(tX))w$ donde $X, w \in \mathfrak{g}$. ad es una aplicación que en cada X te da $X_{\mathfrak{g}}$, su campo generado por la acción infinitesimal. Si uno se fija en el núcleo de Ad se ve $\text{Ker}(Ad) = Z(G)$. Por tanto, se tiene el morfismo de grupos inyectivo $G/Z(G) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$.

La representación adjunta esta estrechamente relacionada con la estructura de álgebra de \mathfrak{g} , como vemos a continuación. Este resultado no es cierto para toda álgebra de Lie, se necesita que sea un grupo matricial, pero al trabajar con álgebras de dimensión finita sobre \mathbb{R} por el teorema de Ado nos será siempre válido para nosotros.

Proposición 2.4.1. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, donde \mathfrak{g} es un álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{R} . Se tiene:

$$ad_X(Y) = [X, Y]$$

Demostración. Por el teorema de Ado toda álgebra de Lie de dimensión finita que esté sobre un cuerpo de característica cero (en nuestro caso \mathbb{R}) se puede embeber en un álgebra de matrices cuadradas. Por tanto trabajemos como si fuera un álgebra matricial.

$$\begin{aligned} ad_X(Y) &= d(Ad_e)_X(Y) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (Ad_{\exp tX})(Y) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (\exp(tX)Y\exp(tX)^{-1}) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (\exp(tX)Y\exp(-tX)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} ((I + tX + o(t^2))Y(I - tX + o(t^2))) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} ((Y + tXY + o(t^2)Y)(I - tX + o(t^2))) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} ((Y - tYX + tXY + o(t^2))) \\ &= ((Y - tYX + tXY + o(t^2)))|_{t=0} \\ &= [X, Y] \end{aligned}$$

□

Para definir una acción de G en el dual, \mathfrak{g}^* , usamos el pairing. Definimos la **representación coadjunta** como la acción $Ad^* : G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ definida por

$$\langle Ad_g^*(l), v \rangle_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}} = \langle l, Ad_{g^{-1}}(v) \rangle_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}} \quad l \in \mathfrak{g}^*, v \in \mathfrak{g}.$$

esto induce una acción en \mathfrak{g}^* como $(Ad^*)_g(l) = l \circ Ad_{g^{-1}}$. El tomar g^{-1} es para obtener una representación por la izquierda: $(Ad^*)_g(Ad^*)_h = (Ad_{g^{-1}})^*(Ad_{h^{-1}})^* = (Ad_{h^{-1}} \circ Ad_{g^{-1}})^* = (Ad_{(gh)^{-1}})^* = (Ad^*)_{gh}$. Dándonos al dejar variar la g el morfismo de grupos

$$Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*).$$

Para obtener el análogo de ad podemos tomar la diferencial en el neutro y proceder igual que antes ó por dualidad. En este segundo caso, siendo $X_{\mathfrak{g}^*} \in \chi(\mathfrak{g}^*)$ el campo inducido por la acción infinitesimal se tiene:

$$\begin{aligned} \langle (X_{\mathfrak{g}^*})_\zeta, Y \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt}_{t=0} (Ad^*)_{exp(-tX)} \zeta, Y \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}_{t=0} \langle (Ad^*)_{exp(-tX)} \zeta, Y \rangle \\ &= \frac{d}{dt}_{t=0} \langle (Ad_{exp(-tX)})^* \zeta, Y \rangle \\ &= \frac{d}{dt}_{t=0} \langle \zeta, Ad_{exp(-tX)}(Y) \rangle \\ &= \langle \zeta, ad_X Y \rangle \\ &= \langle \zeta, [X, Y] \rangle = [X, Y](\zeta). \end{aligned}$$

Las órbitas de la representación coadjunta las llamamos **órbitas coadjuntas** y escribimos para un $\zeta \in \mathfrak{g}^*$

$$O_\zeta = \{Ad_g^* \zeta : g \in G\}$$

Ahora vamos a definir una forma simpléctica en $T_\zeta O$ y esto lo hacemos a partir de una definida en \mathfrak{g} . El tangente a la órbita nos vienen determinado por los generadores de la acción fundamental, $T_\zeta O = \{X_{\mathfrak{g}^*}(\zeta) : X \in \mathfrak{g}\}$. $X_{\mathfrak{g}^*}$ nos denota los campos generados por la infinitesimal en el dual del álgebra de Lie.

$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall \zeta \in \mathfrak{g}^* \quad X_{\mathfrak{g}^*}(\zeta) = \frac{d}{dt}_{t=0} (\exp(-tX)\zeta)$, es el tangente a la órbita.

Proposición 2.4.2. Sea $\zeta \in \mathfrak{g}^*$ y sean $X, Y \in \mathfrak{g}$. La dos forma en \mathfrak{g}^* , ω , definida como $\omega_\zeta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\omega_\zeta(X, Y) = \langle \zeta, [X, Y] \rangle, \quad \forall \zeta \in \mathfrak{g}^*.$$

nos define una forma simpléctica sobre las órbitas de la acción coadjunta, siendo así sub-variedades simplécticas de \mathfrak{g}^*

Demostración. Para comenzar dejamos uno de los campos variar; se tiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow T_\zeta O \\ X &\longmapsto X_{\mathfrak{g}^*}(\zeta) \end{aligned}$$

Con lo anterior es fácil ver que la forma que acabamos de definir es antisimétrica y bilineal, por la definición con el corchete de Lie. Miremos el núcleo para ver su no degeneración.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\omega_\zeta) &= \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g} : \langle \zeta, [X, Y] \rangle = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} : X_{\mathfrak{g}^*}(\zeta) = 0\} \end{aligned}$$

Se tiene por tanto, que donde se anula son los campos inducidos nulos, luego esta forma será no degenerada. Además se puede ver que el núcleo es precisamente el álgebra del estabilizador. Expresamos la forma ω_ζ en función de como varía $Ad_{\exp(-tX)}^*$ y vemos que sea nula significa que la variación de $Ad_{\exp(-tX)}^*$ es cero, esto es X está en el estabilizador, como vemos a continuación.

$$\begin{aligned} \omega_\zeta(X, Y) &= \langle \zeta, [X, Y] \rangle \\ &= \left\langle \zeta, \frac{d}{dt}_{t=0} \text{ad}_{\exp(tX)} Y \right\rangle \\ &= \langle Ad_{\exp(-tX)}^* \zeta, Y \rangle = 0 \end{aligned}$$

También sabemos que la forma inducida depende de forma suave del punto, esto está claro Por cómo está definida $\langle \zeta, [X, Y] \rangle$. Llamamos ω a la forma diferencial inducida por ω_ζ en cada punto.

Para ver que es una forma cerrada tendremos que echar mano de un par de fórmulas. Ambas se pueden demostrar, al igual que el resto de fórmulas de este tipo, viéndolo para grado cero y uno, y generalizando por linealidad. Luego sólo basta verlo para estos dos grados. Por ejemplo la fórmula de De Rham es

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}) &= (-1)^i \mathcal{L}_{X_i} \omega(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n, X_{n+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{1+j} \omega([X_i, X_j], \dots, X_{n+1}) \end{aligned}$$

Para una 1-forma se tiene: $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$. Localmente podemos presuponer que $d\alpha = df \wedge dg$, luego $LHS = df \wedge dg(X, Y) = df(X) \wedge dg(Y) - df(Y) \wedge dg(X) = X(f)Y(g) - X(g)Y(f)$ y $RHS = X(fY(g)) - Y(fX(g)) - f[X, Y](g) = X(f)Y(g) + f(X(Y(g))) - Y(f)X(g) - f(Y(X(g))) - f(X(Y(g))) + f(Y(X(g))) = X(f)Y(g) - Y(f)X(g)$. Y el caso de 0-formas es inmediato. Para la fórmula de Cartan, $\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X, Y]}$, se demuestra igual.

Ahora usamos estas fórmulas para ver que es cerrada la forma. Se tiene:

$$\begin{aligned} d\omega(X_{\mathfrak{g}^*}, Y_{\mathfrak{g}^*}, Z_{\mathfrak{g}^*}) &= \mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}} \omega(Y_{\mathfrak{g}^*}, Z_{\mathfrak{g}^*}) - C.P \\ &- (\omega([X_{\mathfrak{g}^*}, Y_{\mathfrak{g}^*}], Z_{\mathfrak{g}^*}) - C.P) \end{aligned}$$

Para el primer término se tiene:

$$- (\omega([X_{\mathfrak{g}^*}, Y_{\mathfrak{g}^*}], Z_{\mathfrak{g}^*}) - C.P) = \langle \zeta, [[X, Y], Z] \rangle \pm C.P = 0.$$

Para el otro se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}}\omega(Y_{\mathfrak{g}^*}, Z_{\mathfrak{g}^*}) &= \mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}}i_{Z_{\mathfrak{g}^*}}i_{Y_{\mathfrak{g}^*}} \\
&= i_{Z_{\mathfrak{g}^*}} \left[\mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}}, i_{Y_{\mathfrak{g}^*}}\omega \right] + i_{[X_{\mathfrak{g}^*}, Z_{\mathfrak{g}^*}]} (\omega(Y_{\mathfrak{g}^*}, \cdot)) \\
&= i_{Z_{\mathfrak{g}^*}} \left[i_{Y_{\mathfrak{g}^*}}, \mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}}\omega \right] + i_{Z_{\mathfrak{g}^*}}i_{[X_{\mathfrak{g}^*}, Y_{\mathfrak{g}^*}]} \omega + i_{[X_{\mathfrak{g}^*}, Z_{\mathfrak{g}^*}]} i_{Y_{\mathfrak{g}^*}}\omega \\
&= \mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}}\omega(Y_{\mathfrak{g}^*}, Z_{\mathfrak{g}^*}) + \omega(\mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}}Y_{\mathfrak{g}^*}, Z_{\mathfrak{g}^*}) + \omega(Y_{\mathfrak{g}^*}, \mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}}Z_{\mathfrak{g}^*})
\end{aligned}$$

Los dos últimos términos se anulan por la identidad de Jacobi de forma directa. El primero metemos la derivada de Lie dentro y también por Jacobi da 0, como vemos a continuación.

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{X_{\mathfrak{g}^*}} \langle \cdot, [Y, Z] \rangle \right)_{\zeta} &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_t^* \langle \cdot, [Y, Z] \rangle \right)_{\zeta} \\
&= \langle \zeta, [Y, Z] \rangle = 0.
\end{aligned}$$

□

Por lo tanto con el método anterior podemos definir una forma simpléctica en las órbitas coadjuntas de \mathfrak{g}^* . Con esto las órbitas coadjuntas nos dan siempre subvariedades simplécticas. En el caso concreto de $\mathfrak{u}(n)^*$ nos dan subvariedades simplécticas compactas. Esto lo usaremos más adelante para el teorema de Schur-Horn.

2.5. Reducción simpléctica

En esta breve sección enunciaremos uno de los resultados junto con el teorema de convexidad más importantes de acciones en simpléctica, la reducción simpléctica ó teorema de Marsden-Weinstein-Meyers. Nuestro objetivo es cocientar y darle al espacio de órbitas una estructura simpléctica; para ello usamos una acción $G \curvearrowright (M, \omega)$ por simplectomorfismos. El teorema nos dice que bajo ciertas condiciones podemos cocientar la preimagen de la aplicación momento de un punto, $\mu^{-1}(a)$, por el grupo resultando una variedad que admite una estructura simpléctica tal que su pullback por la proyección coincide con la de la forma simpléctica original restringida a $\mu^{-1}(a)$. La prueba de este enunciado requiere artillería pesada que no nos será útil más adelante, y la omitiremos.

Teorema 2.5.1. *Sea (M, ω, G, μ) un G -espacio hamiltoniano, con G un grupo de Lie compacto, y $i : \mu^{-1}(a) \hookrightarrow M$ la inclusión. Supongamos que a es un valor regular de μ y G_a el estabilizador por la acción coadjunta actúa libremente sobre $\mu^{-1}(a)$. Entonces su espacio de órbitas, $\mu^{-1}(a)/G_a$, es una variedad que admite una única estructura simpléctica, denotada $(M_{red} = \mu^{-1}(a)/G_a, \omega_{red})$, tal que $i^*\omega = \pi^*\omega_{red}$, donde $\pi : \mu^{-1}(a) \rightarrow \mu^{-1}(a)/G_a$ es la proyección canónica.*

A la variedad (M_{red}, ω_{red}) se suele llamar **reducción ó cociente simpléctico**. Ahora mostraremos un ejemplo que se usará más adelante y que es importante, ya que normalmente a los espacios proyectivos se les da una estructura simpléctica por medio de la reducción.

Ejemplo 2. Espacios proyectivo simpléctico *Sea la variedad simpléctica $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega_{STD})$, con ω_{STD} la forma simpléctica canónica. Y tomemos la acción diagonal del círculo del círculo, $U(1) \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1}$, la aplicación momento de esta acción será:*

$$\mu(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n |z_i|^2$$

Para esta acción el único punto crítico de la aplicación momento es el 0. Podemos tomar la preimagen de un valor regular como $\frac{1}{2}$ y la preimagen serán todos aquellos puntos tal que la norma sea 1, esto es \mathbb{S}^{2n+1} . Por tanto

$$\mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)/\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 = \mathbb{CP}^n$$

será el cociente simpléctico, con forma simpléctica reducida.

Ahora vamos a ver como se trabaja la reducción con el producto de dos grupos. Sea $G = G_1 \times G_2$ un grupo formado por el producto de dos grupos de Lie compactos actuando sobre una variedad simpléctica (M, ω) . El álgebra de Lie de dicho grupo será la suma directa de \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_2 y análogamente para el dual.

Si es una acción hamiltoniana se tendrá una aplicación momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}_1^* \times \mathfrak{g}_2^*$, que se puede descomponer como $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, con $\mu_i : M \longrightarrow \mathfrak{g}_i^*$. El que la aplicación momento sea equivariante hace que lo sean cada una de estas aplicaciones por separado respecto del grupo compacto, esto es, μ_1 lo es de G_2 , y a la inversa.

Reduzcamos (M, ω) respecto de una de ellas en el origen, por ejemplo, la de G_1 . Si suponemos que G_1 actúa libremente sobre $\mu_1^{-1}(0)$ podemos reducir a $(\mu_1^{-1}(0)/G_1, \omega_{red}) = (M_1, \omega_1)$. Y podemos obtener la aplicación momento que tiene G_2 cuando actúa sobre este cociente.

Proposición 2.5.2. Sean $G = G_1 \times G_2$ actuando en (M, ω) , siguiendo con la notación anterior, y sean la inclusión $i_1 : \mu_1^{-1}(0) \hookrightarrow M$ y la proyección canónica $\pi_1 : \mu_1^{-1}(0) \rightarrow M_1$. Si G_1 y G_2 son compactos y G_1 actuando libremente sobre $\mu_1^{-1}(0)$, entonces se tiene que existe $J_2 : M_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2^*$ tal que:

1. J_2 es diferenciable y cumple $J_2 \circ \pi_1 = \mu_2 \circ i_1$.
2. J_2 es la aplicación momento de la acción $G_2 \curvearrowright (M_1, \omega_1)$.
3. Si G actúa de forma libre sobre $\mu(0, 0)$, entonces G_2 lo hace sobre $J_2(0)$ y se tiene el siguiente symplectomorfismo

$$J_2(0)/G_2 = \mu(0, 0)/G$$

Esta reducción respecto de un subgrupo es una herramienta muy común para la construcción de variedades simplécticas como es el caso de los proyectivos.

2.6. Ejemplos de acciones hamiltonianas

En ésta sección se exponen algunos de los ejemplos más usuales de acciones hamiltonianas. Daremos primero una motivación física.

Una de las principales aplicaciones de los campos hamiltonianos, y en consecuencia también de las acciones hamiltonianas, es la mecánica. Estos nos ayudan a describir un sistema físico.

Un sistema mecánico clásico puede ser descrito por (T^*M, H) donde $H \in C^\infty(T^*M)$ es una función hamiltoniana. El fibrado cotangente es canónicamente simpléctico. El campo asociado X_H induce por la estructura simpléctica la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt}\rho_t = X_H \circ \rho_t$$

Estas ecuaciones nos describen el movimiento de las partículas que serán desplazadas a través de las curvas integrales de X_H .

Tomamos como caso concreto \mathbb{R}^3 , con coordenadas $(x_1, x_2, x_3) = x$ y el potencial $V(x)$. Por la segunda ley de Newton una partícula de masa m tiene su movimiento descrito por $\ddot{x} = -\nabla V(x)$.

El momento del sistema será p , con $p_i = m\dot{x}_i$ para $i = 1, 2, 3$. El Hamiltoniano de este

sistema es $H(x, p) = \frac{1}{2m}|x|^2 + V(x)$, la suma de la energía potencial y cinética. El espacio de fases será $T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$, con coordenadas $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$. La segunda ley de Newton nos da:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}p_i = \frac{dH}{dp_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx_i} = -\frac{dH}{dx_i} \end{cases}$$

estas son las ecuaciones de Hamilton vistas en . Así se ve que la energía, H , está conservada por el movimiento.

Esta forma de plantear un sistema de movimiento tienes sus ventajas. En el tenemos una EDO de primer orden en lugar de una de segundo orden. Por tanto, no nos es necesario saber valores iniciales de las derivadas primeras para predecir su comportamiento futuro. Nos da también una descripción en independiente de las coordenadas ya que la forma simpléctica es canónica, en este caso.

Lo anterior no es sólo aplicable al caso (T^*M, H) si no que generalizamos a (M, ω, H) con $H \in C^\infty(M)$. En la física resultan interesantes las simetrías, que corresponden a una acción de grupo, ya que conservan las cantidades. Aquí entra en juego la aplicación momento, que es considerada como la conservadora de cantidades.

Teorema 2.6.1. *Sea (M, ω, H) un sistema Hamiltoniano y $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ la aplicación momento de $G \curvearrowright M$ tal que H es invariante. Entonces μ es constante a lo largo de las curvas integrales de X_H , el campo hamiltoniano correspondiente.*

Demostración. Sea ρ_t el flujo de X_H , y X un campo en M .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mu(\rho_t)(Y) &= d\mu(\rho_t)\frac{d}{dt}\rho_t(Y) \\ &= \omega(X_H \circ \rho_t, Y_\mu \circ \rho_t) \\ &= i_{X_H}\omega|_{\rho_t}(Y_\mu \circ \rho_t) \\ &= dH(\rho_t)(Y_\mu \circ \rho_t) \\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0}H(\exp(sY)\rho_t) = 0 \end{aligned}$$

Alternativamente se puede demostrar pasando a la interpretación infinitesimal: $\mathcal{L}_{X_H}\mu^X = i_{X_H}d\mu^X = \{\mu^X, X_H\} = \mathcal{L}_{v_X}H = 0$. \square

Esto nos dice que el campo X_H es tangente a los conjuntos de nivel de la aplicación

momento. Este resultado es una de las formas del teorema de Noether. Ahora veremos algunos ejemplos habituales de aplicaciones momento.

Ejemplo 3. Momento angular (rotaciones en \mathbb{R}^3)

Tomemos como variedad $M = \mathbb{R}^6 \cong T^*\mathbb{R}^3$ con la forma simpléctica canónica, en \mathbb{R}^6 . Este era el modelo visto antes para el movimiento de partículas. A las coordenadas canónicas las volvemos a llamar $(x, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, correspondientes a posición y momento.

Si buscamos que nuestro potencial sea invariante bajo rotaciones obtendremos una función Hamiltoniana invariante por la acción $SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}^6$, dada como:

$$R(x, p) = (Rx, Rp) \text{ con } R \in SO(3).$$

El grupo ortogonal especial tiene por álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, formada por las matrices antisimétricas. La acción infinitesimal resulta ser

$$v_M(x, p) = \frac{d}{dt}_{t=0} (\exp(tv)x, \exp(tv)p) = (vx, vp) \quad \forall v \in \mathfrak{so}(3)$$

La aplicación momento resultante será:

$$\mu((x, p))(v) = \langle p, vx \rangle$$

El álgebra $\mathfrak{so}(3)$ se puede identificar con \mathbb{R}^3 vía el isomorfismo

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{so}(3) \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

esto nos da

$$\sigma : (y)x = y \times x \text{ y } \mu((x, p))(y) = \langle p, y \times x \rangle = \langle x \times p, y \rangle.$$

Y por tanto, la aplicación momento tendrá la forma:

$$\mu(x, p) = x \times p.$$

Ejemplo 4. Momento lineal (traslaciones)

Sea $M = \mathbb{R}^{2n}$, con la forma simpléctica canónica $\sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ y $G = (\mathbb{R}^n, +)$. Éste se puede interpretar como un espacio fase con n grados de libertad.

Definimos la acción $\psi : G \curvearrowright \mathbb{R}^{2n}$ por traslación, como:

$$\begin{aligned} ev_\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (g, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}) &\longmapsto \psi_g \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + p \\ p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego como $i_{v\partial q_i}(dq_i \wedge dp_i) = v dq_i$, la aplicación momento resultante será:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (q, p) &\longmapsto \mu(q, p) = p \end{aligned}$$

tal que

$$\mu^v(q, p) = \langle \mu(q, p), v \rangle = p \cdot v.$$

Dándonos así el momento lineal.

Capítulo 3

Teorema de convexidad de la aplicación momento

En este capítulo veremos el objetivo de este texto, en el se enuncia y da la prueba del teorema de conexidad (3.3.5) y algunos ejemplos, entre ellos el teorema de Schur-Horn. El resultado que buscamos se demostró por Atiyah [2] y Guillemin-Stenberg [8] casi a la vez. La prueba seguiremos es la de estos últimos que está dividida en tres partes. En la primera se enuncian algunas de las propiedades de la aplicación momento y los puntos fijos de la acción, así como el caso concreto del toro. Luego se da una prueba local, alrededor de los puntos fijos y una versión relativa, para ello compararemos la acción localmente con la acción en el tangente, de la que obtendremos una expresión explícita y que su imagen sólo difiere en una traslación de la nuestra. Para terminar la demostración usaremos la teoría de Morse y la versión relativa para ver que efectivamente la imagen es la envoltura convexa de los puntos fijos de la acción.

En la última sección del capítulo veremos el teorema de Schur-Horn 3.4.3. El Teorema de Schur-Horn ya se conocía tiempo antes de que se demostrase el teorema de convexidad de la aplicación momento y fue una de las motivaciones para ello. Este es un teorema de álgebra lineal con una enunciado bastante sencillo; dice que a cada matriz hermitica H con autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$, su vector diagonal estará contenido en la envoltura convexa de los vectores que tienen por entradas las permutaciones de estos autovalores. Y al contrario, a cada vector de esta envoltura le corresponde la diagonal de una matriz hermitica con estos autovalores.

3.1. Propiedades generales de la aplicación momento

En esta primera parte vamos a ver algunas de las propiedades de la aplicación momento de una acción hamiltoniana. En concreto vamos a caracterizar su comportamiento para puntos con un mismo estabilizador. Sobre todo su imagen.

Para empezar supongamos que G es un grupo de Lie conexo y compacto, que actúa por una acción hamiltoniana sobre una variedad simpléctica (M, ω) , con aplicación momento Φ .

Teorema 3.1.1. *Sea $x \in M$, G_x su estabilizador en G y \mathfrak{g}_x la correspondiente álgebra de Lie. Entonces la imagen de $d\Phi_x : T_x \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es el anulador de \mathfrak{g}_x en \mathfrak{g}^**

Demostración. Sea $x \in M$ $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_x M$ la aplicación que lleva cada $v \in \mathfrak{g}$ a la evaluación en x del campo que genera por la acción infinitesimal. Y sea $\beta : T_x M \rightarrow T_x M^*$ el isomorfismo dado por $i_v \omega$.

Como las componentes de la aplicación momento son las funciones hamiltonianas de los campos de la acción infinitesimal, $d\Phi^v = i_{v^\#} \omega$, se tiene que $\alpha \circ \beta$ será la traspuesta de $d\Phi_x : T_x M \rightarrow \mathfrak{g}$. Luego la imagen de $d\Phi_x$ vendrá dada por el anulador del núcleo de $\alpha \circ \beta$. Éste, estará formado por todos los vectores en \mathfrak{g} tal que $v^\#$ se anule en x , es decir, el álgebra del estabilizador.

□

Corolario 3.1.2. *La aplicación momento es submersión en $x \in M$ es equivalente a que el estabilizador de ese punto sea discreto.*

Ahora daremos unos cuantos resultados (algunos sin prueba) sobre el papel del estabilizador en las acciones en acciones de grupos compactos. Para fijar notación G es un grupo de Lie compacto y conexo que actúa sobre M , una variedad conexa diferencial cualquiera de forma diferencial.

Proposición 3.1.3. *Si M es compacta, módulo conjugación, existe sólo un número finito de estabilizadores de puntos de M en G .*

Demostración. Una prueba de este enunciado se puede encontrar en Mostow [12] ó en Yang [15]. □

Proposición 3.1.4. *Si H es un subgrupo cerrado de G y $M_H = \{x \in M : G_x = H\}$. Entonces M_H es una subvariedad de M y el espacio tangente a M_H en $x \in M_H$ será los*

vectores H -fijos en $T_x M$. Además si M es compacta, M_H estará formada por un número finito de componentes conexas.

Demostración. Una prueba de este enunciado se encuentra en Montgomery [11]. \square

Ver Sternberg, pag. 212

Supongamos ahora que se trata de (M, ω) sobre la que G actúa por una acción hamiltoniana.

Lema 2. Sea (V, Ω) espacio vectorial simpléctico y H un subgrupo compacto de $Sp(V)$. El conjunto de vectores H -fijos en V , W , será un espacio vectorial simpléctico.

Demostración. Tomamos una métrica B H -invariante. Se tiene que $\exists! A : V \rightarrow V$ tal que:

$$\forall v, w \in V \quad B(v, w) = \Omega(v, Aw).$$

y A es H -invariante. Si $v \in W$ y $\Omega(v, w) = 0 \quad \forall w \in W$, se tiene que $Aw \in W$. Luego $B(v, w) = \Omega(v, Aw) = 0 \quad \forall w \in W$ y, por tanto, $v = 0$. \square

Teorema 3.1.5. Sea H un subgrupo cerrado de G y sea $M_H = \{x \in M : G_x = H\}$. Entonces M_H será una subvariedad simpléctica de M .

Demostración. Por la proposición 3.1.4 se tiene que M_H será subvariedad. Tomando $T_x M_H$ como W en el lema 2 se tiene que ésta será simpléctica. \square

Teorema 3.1.6. Sea \mathfrak{h} el álgebra de Lie de H y sea \mathfrak{h}° su anulador en el dual del álgebra de Lie, \mathfrak{g}^* . Entonces cada componente conexa de M_H será llevada por Φ a un espacio afín en \mathfrak{g}^* de la forma $p + \mathfrak{h}^\circ$. Además si H es un subgrupo normal de G se tiene que $\Phi|_{M_H} : M_H \rightarrow p + \mathfrak{h}^\circ$ es una submersión.

Demostración. La primera parte del teorema es el teorema 3.1.1, que restringiéndonos a $x \in M_H$ nos lleva la imagen al anulador de \mathfrak{h}° .

Como H es normal, es invariante por conjugación y M_H es G -invariante. Entonces la restricción sigue siendo una acción hamiltoniana, y su aplicación momento es:

$$M_H \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{g}^*$$

composición de la inclusión con la aplicación momento. $\forall v \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} (\Phi \circ i)^v &= \Phi^v \circ i \\ d(\Phi \circ i)^v &= d(\Phi^v \circ i) \\ &= d(\Phi^v) \circ di \\ &= i_v \omega \circ di \\ &= i_v(i^* \omega) \end{aligned}$$

siendo $(M_H, i^* \omega)$ la variedad simpléctica. Fijándonos que en cada punto de M_H el estabilizador es H , al aplicar sobre esta el teorema 3.1.1 se tiene que $(d\Phi')_x : T_x M \rightarrow \mathfrak{h}^*$ es una aplicación sobreyectiva.

□

En el caso de que $H = G$, y éste sea un grupo abeliano, se tiene que $\Phi(M_G)$ es discreto. Si además la variedad es compacta podemos afirmar que hay una cantidad finita de dichos puntos. En este caso, veremos más adelante que serán los vértices de la imagen de la aplicación momento.

Para el caso más concreto de $G = \mathbb{T}^n$ (un n-toro) y M una variedad compacta se puede hacer una partición de M como suma disjunta. Por compacidad la proposición 3.1.3 nos dice que hay una cantidad finita, bajo conjugación, de subgrupos estabilizadores T_1, T_2, \dots, T_n .

Renumerando de tal forma que se puedan tener $T_i = T_j$ con $i \neq j$, podemos suponer que para T_1, T_2, \dots, T_m los M_{T_i} 's son conexos. Luego:

$$M = \bigsqcup_{i=1}^m M_{T_i}$$

Por ser todos subgrupos normales se tiene que los M_{T_i} son subvariedades simplécticas y existe un vector $a_i \in \mathfrak{t}^*$ tal que Φ lleva M_{T_i} a un abierto de $a_i + \mathfrak{t}_i^*$ de \mathfrak{t}^* por el teorema 3.1.6. Ahora lo enunciamos como teorema para poder usarlo en la versión relativa del teorema de convexidad local.

Teorema 3.1.7. *Cada M_{T_i} será una subvariedad simpléctica de M . Y existe $a_i \in \mathfrak{t}^*$, tal que Φ lleva M_{T_i} a un subconjunto abierto de $a_i + \mathfrak{t}_i^\circ$ en \mathfrak{t}^* .*

Ahora llamando v_1, v_2, \dots, v_k los vértices de $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.8. $\Phi(M_i)$ es la unión de un número de componentes conexas, tal que cada una es la envoltura convexa de conjunto de los v_i 's.

Demostración. Supongamos que \mathbb{T} es un n -toro. Por lo anterior $\Phi(M_{T_i})$ será un punto de, concretamente uno de los vértices. Supongamos como hipótesis de inducción que es cierto para $\text{codim}(T_i) \leq m$. Si $\text{codim}(T_i) = m$ se tiene que la imagen de M_{T_i} es un abierto contenido en $a_i + \mathfrak{t}_i^*$. Las componentes de su frontera están contenidas en $\bigcup_j \Phi(M_{T_j})$ tal que $T_j \supset T_i$. Por hipótesis de inducción se tiene el resultado para $\Phi(M_{T_j})$ y por tanto para $\Phi(M_{T_i})$. \square

3.2. Teorema de convexidad local

En ésta segunda parte vamos a obtener la expresión de la aplicación momento de la acción hamiltoniana en un entorno de un punto fijo. Primero pasaremos a la acción en el tangente por la exponencial para compararla con la de la acción lineal. Y luego, veremos que la imagen de ésta se puede describir en pesos.

Seguimos en el caso de la acción de un grupo de Lie compacto y conexo, G , sobre una variedad M . El siguiente teorema al igual que en otros de formas locales se demuestra usando el truco de Moser.

Teorema 3.2.1. Sean ω_0 y ω_1 dos formas simplécticas G -invariantes definidas sobre M y tal que $\omega_0 = \omega_1$ en $x \in M$. Entonces existe un entorno de x G -invariante, $U_0(x)$, y una aplicación G -equivariante $\Psi : (U_0, x) \rightarrow (M, x)$ tal que $\Psi^*\omega_1 = \omega_0$.

Demostración. Sea $\omega_t = (t-1)\omega_0 + t\omega_1$, $\forall t \in [0, 1]$. Ésta será una familia suave de formas simplécticas (por linealidad y conmutación con pullback).

Supongamos que existe $\rho : U \times \mathbb{R} \rightarrow M$, isotopía, donde U es un entorno de x G -equivariante y contractible tal que $\rho_t^*\omega_t = \omega_0$. Sea:

$$v_t = \frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho_t^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se tiene por la regla de la cadena que:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(\rho_t^* \omega_t) \\
&= \frac{d}{dt} \left(L_{v_t} \omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} \right) \\
&\Leftrightarrow L_{v_t} \omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} = 0
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que cumple dicha ecuación en $[0,1]$ para algún v_t . Integrando se tiene:

$$\rho_t^* \omega_t = \rho_0^* \omega_0 = \omega_0.$$

Por la forma de ω_t se tiene:

$$\frac{d\omega_t}{dt} = \omega_1 - \omega_0.$$

Además ésta será cerrada en U y $(\omega_1 - \omega_0)_x = 0$. Por la fórmula de la homotopía en un entorno, que se puede encontrar en las lecturas de Cannas [6], sec 6,3, existe una forma μ en U tal que $\omega_1 - \omega_0 = d\mu$, con $\mu_x = 0$. Tomando la media sobre G podemos suponer además que μ es G -equivariante. Aplicando la fórmula de Cartan tenemos:

$$\begin{aligned}
L_{v_t} \omega_t &= d(i_{v_t} \omega_t) + i_{v_t} d\omega_t \\
&= d(i_{v_t} \omega_t) \\
&= \frac{d\omega_t}{dt} \\
&= -d\mu
\end{aligned}$$

Obtenemos así la ecuación de Moser $i_{v_t} \omega_t = -\mu$. Como $\omega_t = \omega_0 = \omega_1$ en x podemos suponer que ω_t no es degenerado en U , ó en un subentorno U_0 si fuese necesario. Por tanto existe una única solución v_t de la ecuación. \square

Ahora vamos a considerar el caso en que $G \curvearrowright (M, \omega)$ es una acción hamiltoniana con aplicación momento $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Consideramos ω_1 la forma simpléctica lineal en el

tangente a $x \in M$ y Φ_1 la aplicación momento asociada a la acción $G \curvearrowright T_x M$. Con el resultado anterior podemos pasar localmente de la forma G -equivariante el pullback de la exponencial de la forma simpléctica en M y ver que su aplicación momento difiere en una traslación de la aplicación momento de la lineal.

Tomando una métrica G -equivariante se tiene en M en cada $x \in M$ el difeomorfismo local G -equivariante dado por la exponencial en M . Luego $\exists U_0(0)$ entorno de 0 en $T_x M$ y $V(x)$ entorno de x en M tal que $\exp : U_0 \rightarrow V$ es un difeomorfismo G -equivariante.

Tomando $\omega_1 = (\exp)^* \omega$ por el resultado anterior se tiene que existe $U_0 \subset V$, entorno de 0 a $T_x M$ y $\Psi : U_0 \rightarrow T_x M$ tal que $\Psi^* \omega_1 = \omega_0$.

Teorema 3.2.2. *Las aplicaciones momento $\Phi_0 = \Phi \circ \exp : U_0 \rightarrow \mathfrak{g}^*$ y $\Phi_1 : \Psi(U_0) \rightarrow \mathfrak{g}^*$ difieren en una constante.*

Demostración. Por la propiedad de los momentos $i_{v_M} \omega = d\Phi^{v_M}$ y tomando la diferencia sale inmediato. \square

Corolario 3.2.3. *La imagen de las aplicaciones momento $\Phi_0 : U_0 \rightarrow \mathfrak{g}^*$ y $\Phi_1 : \Psi(U_0) \rightarrow \mathfrak{g}^*$ son idénticas, módulo traslación.*

Podemos trabajar entonces, de forma localmente equivalente con $\Phi_1 : T_x M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Por ser la dimensión el único invariante en un espacio vectorial simpléctico podemos considerar $Sp(2n)$ en $((R)^2n, \omega_{CAN})$ ó $(\mathbb{C}, \omega_{CID})$. Donde la estructura casi compleja se puede identificar con i .

Para poder expresar de forma explícita la aplicación momento vamos a usar pesos. Así que antes enunciaremos un par de lemas de álgebra lineal que nos serán útiles. Sea $\mathbb{A} \in \text{End}(V)$, un subespacio de los endomorfismos de V , un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Donde \mathbb{K} denota el cuerpo de los números reales, ó los complejos. Diremos que V es **simultáneamente diagonalizable** si existe una descomposición en subespacios vectoriales de V , $V = \bigoplus_{i=1} V_i$ tal que $\forall A \in \mathbb{A} : A|_{V_i} = \lambda_i Id_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Lema 3. *Sea $\mathbb{A} \in \text{End}(V)$, subespacio. Si $v \in V$ es un autovalor simultáneo de todos los elementos de \mathbb{A} , entonces existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Av = \lambda v \forall A \in \mathbb{A}$*

Demostración. Se tiene: $\lambda(A+B)v = (A+B)v = Av + Bv = \lambda(A)v + \lambda(B)v$. Luego se cumple \square

Lema 4. *Si $A \subset \text{End}(V)$ subconjunto (no necesariamente subespacio). Que los elementos sean simultáneamente diagonalizables equivale a que sean diagonalizables y conmuten dos a dos.*

Demostración. Si son simultáneamente diagonalizables es obvio que cumplen las dos cosas. Por otra parte, sean $A, B \in \text{End}(V)$. Inducción: $\dim(V) = 1 \Rightarrow$ es claro.

Si $\dim(V) = n > 1 \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1} V_i$ y se tiene $\text{Ker}(A - \lambda_i \text{Id}_V)$, V_i subespacio de V y además A y B conmutan.

Si A es diagonalizable \Rightarrow también lo es $A|_{V_i}$. Luego $A|_{V_i}$ y $B|_{V_i}$ lo son. Por hipótesis de inducción son simultáneamente diagonalizables. Y por construcción con la suma directa $A|_{V_1 \oplus \dots \oplus V_k}$ y $B|_{V_1 \oplus \dots \oplus V_k}$ también lo son. \square

A continuación vamos a ver un algunas propiedades de $Sp(T_x M)$.

Lema 5. $U(n)$ es un subgrupo maximal compacto de $Sp(2n)$.

Demostración. Si $\Psi \in Sp(2n) \cap O(2n)$:

$$\psi = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in GL(2n).$$

tal que $X^T Y = Y^T X$ y $X^T X + Y^T Y = \mathbb{1}$ (el vector unitario), esto es ortogonal y simpléctico. Es lo mismo que $U = X + iY$ sea unitaria. Luego $Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$. Sea $H \subset Sp(2n)$ un subgrupo compacto. Sea $\varphi \in Sp(2n)$ matriz simétrica y definida positiva., tal que:

$$\psi^t \varphi \psi = \varphi \quad \forall \psi \in G.$$

Una matriz φ se puede sacar como la promedio de $\psi^t \psi$ de $\psi \in G$. Usando la medida de Haar para un grupo de Lie compacto. $\varphi^{\frac{1}{2}}$ seguirá siendo simpléctica. Luego:

$$\psi \in G \quad \implies \quad \varphi^{\frac{1}{2}} \psi \varphi^{\frac{-1}{2}} \in Sp(2n) \cap O(2n) = U(n).$$

y se tiene que G será un subgrupo conjugado de $U(n)$ \square

Para cada $p \in T_x M$, tomamos $\Phi_2(p) \in sp(T_x M)$, tal que a cada elemento de $sp(T_x M)$ le asigna la evaluación del polinomio asociado en el punto p . Dejando variar la p se tiene $\Phi_2 : T_x M \rightarrow sp(T_x M)^*$.

Lema 6. La aplicación Φ_2 corresponde a la aplicación momento de la acción lineal del grupo simpléctico $Sp(T_x M)$ en $T_x M$.

Ahora un lema muy sencillo sobre aplicaciones momento, que nos dice como hacer una momento por la inclusión del álgebra

Lema 7. *Sea la acción $\Phi : G \curvearrowright (M, \omega) \xrightarrow{J} \mathfrak{g}^*$. Sea $H \subset G$ subgrupo. Entonces la restricción a H de la acción, $\Psi : H \curvearrowright (M, \omega)$ tiene por aplicación momento $(M, \omega) \xrightarrow{J} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{h}^*$. Con $i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$, la inclusión de álgebras de Lie.*

Demostración. Llamamos v_{M_1} y v_{M_2} a los campos inducidos por las correspondientes acciones infinitesimales: $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \chi(M)$, $v \mapsto v_{M_1}$ y $\psi : \mathfrak{h} \rightarrow \chi(M)$, $v \mapsto v_{M_2}$. Y $J' = (i \circ J)$. Con pocos cálculos se tiene:

$$\begin{aligned} i_*(v_{M_2})|_p &= \frac{d}{dt}|_{t=0} i\{\Psi(\exp(-tv), p)\} \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi\{i(\exp(-tv), p)\} = (v_{M_1})_p \end{aligned}$$

Por ser la acción de G una acción hamiltoniana, no es difícil ver que también lo es la de H . Se tiene $J' = i_{v_{M_2}}\alpha$. Veamos que $J'(h\xi) = Ad_h^*J'(\xi)$. Haciendo el pairing, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle J'(h\xi), v \rangle &= J'^v(h\xi) \\ &= (i_{v_{M_1}}\alpha)(h\xi) \\ &= \langle Ad_h^*J'(\xi), v \rangle \\ &= \langle J'(\xi), Ad_{h^{-1}}v \rangle \\ &= \{i_{(Ad_{h^{-1}}v)|_{M_1}}\alpha\}(\xi) \end{aligned}$$

Aplicando el criterio infinitesimal al usar la fórmula de Cartan ($i_v d = L_v - di_v$):

$$\begin{aligned} L_{w_{M_2}}(i_{v_{M_2}}) &= i_{w_{M_2}}(di_{v_{M_2}}) \\ &= i_{w_{M_2}}(-i_{v_{M_2}}d\alpha) = -\omega(w_{M_2}, v_{M_2}) \\ &= i_{w_{M_2}}(dJ^v) = \langle dJ^v, w_{M_2} \rangle \\ &= \langle i_{v_{M_2}}\omega, w_{M_2} \rangle = w_{M_2}i_{v_{M_2}}\alpha \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Cratan $-d\alpha(X, Y) = Y(\alpha(X)) - X(\alpha(Y)) + \alpha([X, Y])$ se tiene:

$$-d\alpha(v_{M_2}, w_{M_2}) = -v_{M_2}(\alpha(w_{M_2})) + w_{M_2}(\alpha(v_{M_2})) + i_{[v_{M_2}, w_{M_2}]} \alpha.$$

y de $L_X i_Y - i_Y L_X = i_{[X, Y]}$ sacamos:

$$\begin{aligned} L_{w_{M_2}}(i_{v_{M_2}} \alpha) &= i_{v_{M_2}}(L_{w_{M_2}} \alpha) + i_{[v_{M_2}, w_{M_2}]} \alpha \\ &= J^{[w, v]} \end{aligned}$$

Luego por el criterio es H -equivariante. La aplicación momento resultante es $J_H = i^* \circ J_G$.

□

Corolario 3.2.4. $\Phi_1 : T_x M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es la composición de $i^* : sp(T_x M)^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ con $\Phi_2 : T_x M \longrightarrow sp(T_x M)^*$, donde i viene dada por la acción en el tangente.

Demostración. Teniendo en cuenta las inclusiones $G \hookrightarrow Sp(T_x M)$ y $\mathfrak{g} \hookrightarrow sp(T_x M)$ la prueba es inmediata con los dos lemas anteriores, Lema 6 y Lema 7. □

Ahora vamos a ver como se puede expresar ϕ_1 a partir del hecho de ser una composición de la dual de la inclusión i^* y la acción dada por $Sp(2n)$. La imagen de la inclusión será un toro. Veamos como es la representación de dicho toro. Como trabajar con todo $sp(2n)$ no es complicado buscamos un subgrupo de Lie en el que sea más fácil.

Sea la acción $\mathbb{T} \curvearrowright (V, \omega)$, con (V, ω) espacio vectorial simpléctico, y sea J la estructura compleja compatible. A nivel de álgebra lineal vimos que $(V, \omega, J) \cong (\mathbb{C}^n, \omega_{STD}, i)$. Los morfismos que respetan la forma simpléctica estarán en $Sp(2n)$ y los que respetan la estructura compleja compatible estarán en $Gl_n(\mathbb{C})$. Luego que respeten ambos significa que están en $U(n)$. Por tanto, una acción $\mathbb{T} \curvearrowright (V, \omega)$ que respete dichas estructuras se puede ver también como un morfismo $\mathbb{T} \longrightarrow U(n)$.

Se tiene por ser \mathbb{T} abeliano que $\forall t \in \mathbb{T}$, $\phi(t)_{t \in \mathbb{T}}$ conmutan dos a dos. Y siendo $\phi(t) \in U(n)$ estos serán diagonalizables. Luego aplicando los lemas vistos antes existe una descomposición $V = \bigoplus_i V_i$ tal que $\phi(t)|_{V_i} = \lambda_{\phi(t)} id_{V_i}$.

Ahora pasemos al nivel de las álgebras. Recordemos que dado un morfismo de grupos de Lie $\Psi : G \longrightarrow H$ este siempre se puede levantar a $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ por medio de la

composición con las exponenciales. Para ir en dirección contraria tendríamos que usar el segundo teorema de Lie.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_G & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{\Psi} & H \end{array} \quad \text{siendo además } d_e \Psi = \psi.$$

En nuestro caso el diagrama es:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow[\ast]{\phi} & \mathfrak{U}(n) \\ \downarrow \exp_{\mathbb{T}} & & \downarrow \exp_{U(n)} \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

A nivel de álgebras podemos razonar como antes. Sabemos que $\mathfrak{U}(n)$ esta formado por las matrices antihermíticas. Sea $\alpha : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{U}(n)$ un morfismo de álgebras, como son diagonales y conmutan dos a dos las matrices antihermíticas se tiene: $\exists V = \bigoplus_{\alpha \in \text{Hom}(\mathfrak{t}, i\mathbb{R})} V_\alpha$ tal que $\forall A$ en la imagen $A|_{V_\alpha} = \alpha(A)Id_{V_\alpha}$.

Al escribir $\text{Hom}(\mathfrak{t}, i\mathbb{R})$ estamos suponiendo que estos subespacios tiene dimensión compleja uno. Lo cual, gracias al Lema de Schur, no es suponer mucho ya que $\alpha(A)Id_{V_\alpha}$ en un espacio de dimensión finita V_α se puede descomponer sucesivamente hasta que tenga la dimensión deseada.

Miro la relación que se da entre ambos morfismo ϕ y α :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{t=0} \phi(\exp_{\mathbb{T}^n}(tA)|_{V_\phi}) &= \frac{d}{dt}_{t=0} \phi(\exp_{\mathbb{T}^n}(tA))Id|_{V_\phi} \\ &= \frac{d}{dt}_{t=0} \exp_{U(n)}(t\phi_*(A)) \cdot Id|_{V_\alpha} \\ &= \frac{d}{dt}_{t=0} e^{t\phi_*(A)} \cdot Id|_{V_\alpha} = \phi_*(A)Id|_{V_\alpha} \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $\forall A \in \mathfrak{t}$, $\phi_*(A) = \alpha(A)$. En esto hemos utilizado que el último diagrama conmuta. Sea $\beta = \phi \circ \exp_{\mathbb{T}}$ y $L = \text{Ker}(\exp_{\mathbb{T}})$. Vemos que β tiene que ser trivial en L : $\beta(x) = 1 \forall x \in L$. De hecho es fácil ver que $\beta : \mathfrak{t} \rightarrow U(V)$ es representación de grupos sí y sólo si lo es β . Y también que ϕ es irreducible (esto es, sólo hay un dos espacios

invariantes y uno es trivial) sí y sólo si lo es β .

Empecemos en el caso más sencillo, supongamos que se trata del caso irreducible. Por el Lema de Schur la representación irreducible de un abeliano es de dimensión uno. Así $\beta(A)$, $A \in \mathfrak{t}$, es la multiplicación por un número complejo y para su representación tiene que cumplir $\beta(A+B) = \beta(A) \cdot \beta(B)$. Luego una tal representación se puede expresar de la forma

$$\beta(A) = e^{2\pi i l(A)} \text{ con } l \in \mathfrak{t}^*$$

Para que sea trivial en L se tiene $l(A) \in \mathbb{Z} \forall A \in L$. Luego ha de cumplirse que $l \in L^* = \{l \in \mathfrak{t}^* : l(x) \in \mathbb{Z} \forall x \in L\}$. Nos queda el siguiente teorema.

Teorema 3.2.5. *Una representación unitaria irreducible del toro, ϕ , está definida por la elección de $l \in L^*$*

Seguimos en el caso irreducible. Vimos que $sp(V)$ se puede identificar con los polinomios cuadráticos en V . Recordemos que estamos mirando el toro formado por la imagen de la inclusión en $U(n)$ que a su vez está en $Sp(V)$. Llamemos a este toro H . Por lo acabamos de decir existen coordenadas simplécticas estándar (x, y) tal que:

$$\mathfrak{h} \cong \mathbb{R} = \left\{ a \frac{x^2 + y^2}{2} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

y con $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{R} \xrightarrow{i^*} \mathfrak{t}^* \rightarrow 0$, se tiene por el corolario que nos da ϕ_1 como composición que esta es

$$(x, y) \mapsto l \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

compuesta con la dual de la inclusión. Al introducir el i^* aparecen los pesos que hemos visto de la representación y nos queda:

$$(x, y) \mapsto \alpha \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

donde $\alpha \in L^*$.

Ahora volvamos un poco para atrás. Estábamos en $U(n)$ para que se conserven ω y J . Teníamos también la descomposición

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \text{Hom}(\mathfrak{t}, i\mathbb{R})} V_\alpha$$

y por Schur teníamos se tiene que $\dim(V_\alpha) = 1$. Siendo este el caso por la fórmula que relaciona g , ω y J se tiene que si $V_\alpha \perp V_\beta$, también son ortogonales simplécticos. $\forall v_\alpha \in V_\alpha$ y $\forall v_\beta \in V_\beta$

$$g - i\omega(v_\alpha, v_\beta) = 0 = -i\omega(v_\alpha, v_\beta)$$

entonces $(V, \omega) = (V_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_1}) \times (V_{\alpha_2}, \omega_{\alpha_2}) \times \cdots \times (V_{\alpha_k}, \omega_{\alpha_k})$, es una descomposición en espacios simplécticos. La aplicación momento será la de cada una de las correspondientes a cada subespacio por cada coordenada. Por lo tanto recopilando lo anterior nos queda el siguiente teorema

Proposición 3.2.6. *Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{t}^*$ los pesos de la representación de T en $T_x M$. Entonces, existen coordenadas simplécticas $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ tales que la aplicación momento $\Phi_1 : T_x M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ se expresa de la forma:*

$$(x, y) \mapsto \sum \alpha_i \left(\frac{x_i^2 + y_i^2}{2} \right)$$

Corolario 3.2.7. *La imagen de Φ_1 será la envoltura cónica de los pesos:*

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i \alpha_i : s_i \geq 0 \right\}$$

Teorema 3.2.8 (Teorema local de convexidad). *Sea la acción hamiltoniana $T \curvearrowright (M, \omega)$, con T n -toro y (M, ω) variedad simpléctica. Sea $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ su momento y $x \in M$ un punto fijo por la acción. Entonces, existe un entorno $U(x)$, en M y otro entorno V , de $(\Phi(x))$ en \mathfrak{t}^* tal que:*

$$\Phi(U) = V \cap (\Phi(x) + S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \quad (3.1)$$

siguiendo con la notación de antes en pesos.

Demostración. Por el teorema 3.2.2, tenemos que localmente coinciden en $T_x M$ la aplicación momento de la acción lineal y de la aplicación momento de T llevada por la exponen-

cial, bajo traslación. Luego por el corolario inmediatamente anterior, el 3.2.7, se tiene el resultado.

□

Ya tenemos descrita localmente en los puntos fijos de la acción la imagen como un cono con vértice la imagen de este punto. A continuación, obtenemos una forma relativa de este teorema para usarla más adelante junto a la teoría de Morse para el teorema de convexidad.

Sea un punto con estabilizador H , $p \in H$, no necesariamente fijo por la acción. restringimos la acción usando la dual de la inclusión de las álgebras:

$$\Phi_H : M \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{h}^*$$

Definimos $S'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (i^*)^{-1}\{S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\}$. Esto es la preimagen por la i^* de la aplicación momento dada por H en un entorno:

$$\Phi_H(U) = \Phi_H(x) + S_H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Ahora veamos que:

$$\Phi(U) = i^{-1}\{\Phi_H(x) + S_H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\}$$

$$= \Phi(x) + S'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Para ello volvemos a usar la acción lineal simpléctica, en un entorno del origen del tangente, para trabajar mejor.

Teorema 3.2.9. *Existen entornos $U(x)$ y $V(\Phi(x))$, de $x \in M$ y su imagen en \mathfrak{g}^* tal que:*

$$\Phi(U) = V \cap (\Phi(x) + S'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

Demostración. Consideramos sin pérdida de información el tangente $T_x M$, de origen $x \in M$, con la forma simpléctica lineal, M un entorno suyo y la acción de H , la acción isotrópica

lineal en el. Sea M_H el conjunto de puntos que tiene a H como estabilizador. M_H se puede expresar como $M_H = W \cap M$, para W un subespacio vectorial de $T_x M$.

Por 3.1.7 $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{h}^*$ lleva M_H a un abierto del espacio afín $\Phi(x) + \mathfrak{h}^\circ$ como submersión en 0. H actúa de forma trivial sobre W y Φ_H será constante en el espacio afín $a + W \in T_x M$, $a \in T_x M$. Luego $a + W$ es llevado por Φ a $\pi^{-1}(\Phi_H(a)) = \mathfrak{h}^\circ + q$ (con $q = \Phi(a)$). Ésta será una submersión cerca del 0. Luego la imagen de $a + W$ contendrá un entorno de q . Como esto es cierto $\forall a$ suficientemente cerca del 0, $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{h}^*$ tiene un entorno abierto de $\Phi(x)$ en su imagen en $\pi^{-1}(\Phi_H(x))$.

□

3.3. Teorema de convexidad global

En esta parte usaremos la teoría de Morse-Bott para ver que Φ^v tiene un único máximo local, para todo v perteneciente al álgebra de Lie. Seguimos en el caso de una acción hamiltoniana de G , grupo de Lie compacto, sobre la variedad simpléctica (M, ω) , con momento $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$.

En una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que un valor, a , es un máximo local si $\exists x_0 \in M$ y U , entorno de x_0 , tal que $f(x_0) = a$ y $f(x) \leq a, \forall x \in U$.

Sea M una variedad conexa. Se dice que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse-Bott si:

1. El conjunto de puntos críticos, C , esta formado por subvariedades conexas.
2. $\mathcal{Hess}(f)$, el Hessiano de f , es no degenerado en las direcciones normales $\forall p \in C$.

Se tiene además que el índice de f , i_f , será constante en cada componente C_j de C . El índice de cada componente C_j lo denotamos i_j .

Ahora tomamos ∇f de una función de Morse-Bott, para una métrica dada de M . El flujo es $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Para cada componente conexa C_i definimos:

$$W_i = \{p \in M : \varphi_t(p) \rightarrow C_i, \quad t \rightarrow \infty\}$$

Por un resultado de Bott [4].

Teorema 3.3.1. *Si f es un función de Morse-Bott cada W_j es un fibrado sobre C_j con fibra una i_j -celda tal que:*

$$\dim W_j = i_j + \dim C_j$$

y M se puede descomponer como una suma disjunta:

$$M = \bigcup_i W_i$$

Corolario 3.3.2. *Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse-Bott y el índice de cada componente conexa de los puntos críticos, i_j , es par entonces alcanza un único máximo local.*

Demostración. Sean C_1, \dots, C_k las subvariedades formadas por las componentes conexas del conjunto de puntos críticos con máximo local $f|_{C_i} = a_i$ y C_{k+1}, \dots, C_N las restantes.

Por cómo hemos definido las W_i 's, los que tengan un máximo local tienen que ser de dimensión par, y son abiertos de M .

La codimensión de W_i , por $\mathcal{H}ess(f)$ no degenerado en la dirección de la normal tiene que ser i_- . Luego para $k+1, \dots, N$ la codimensión será mayor que 0, ó por hipótesis, $\text{codim} \geq 2$. $\biguplus_{j \geq k} W_j$ es de $\text{codim} \geq 2$ y no desconecta a M ; $M - \biguplus_{j \geq k} W_j$ es conexa y unión de abiertos, luego $k = 1$. \square

Con esto tenemos un criterio para una función de Morse-Bott tenga un único máximo local. Ahora lo aplicamos a Φ^v .

Teorema 3.3.3. *Φ^v es una función de Morse-Bott y los índices de sus variedades críticas son pares.*

Demostración. Sea v_M el campo generado por la $v \in \mathfrak{g}$ a través de la acción infinitesimal, y sea $\rho : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ su flujo.

Si x es un punto crítico, $d\Phi^v = i_{v_M} = 0$, se tiene por ser no degenerado W que equivale a $v_M(x) = 0$ y el flujo es constante en x , $\rho_t(x) = x \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

El flujo lineal es:

$$(d\rho_t)_x : T_x M \longrightarrow T_x M$$

Si le damos una métrica G -equivariante a M podemos intercambiar por $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ el flujo y el flujo lineal. Aquí estamos usando implícitamente el hecho de que \mathbb{R} está dentro de algo compacto, como es el estabilizador \mathbb{T}_p ($\mathbb{T} \supset \mathbb{T}_p \supset \mathbb{R}$), que sabemos que lo será.

Sea $W = \text{Ker}((d\rho_t)_x)$, la exponencial lleva $U \cap W$ a un entorno, V , de los puntos donde se anula v_M . Estos vimos que son los puntos críticos de Φ^v . Luego las componentes conexas serán subvariedades.

Veamos la paridad. Tomamos $H = \{\exp(tv) : t \in \mathbb{R}\}$ subgrupo uniparamétrico que tiene a x como punto fijo. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ los pesos correspondientes de la acción en $T_x M$.

Con la inclusión i , de H en G se tiene $\Phi_H = i \circ \Phi = \Phi^v$. Y aplicando la versión local del teorema de convexidad local para puntos fijos restringiéndonos a H , en un entorno U , se tiene:

$$\Phi^v(q) = \Phi^v(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k |z_k|^2 \quad , \quad q \in W.$$

Podemos asumir que $\exists j, 0 \leq j \leq d$ tal que $\alpha_{j+1} = \alpha_{j+2} = \dots = \alpha_n = 0$. Luego el $\mathcal{Hess}(\Phi^v)$ en x viene dado por la matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & .. & & & & \\ 0 & \alpha_2 & 0 & .. & & & \\ .. & 0 & ... & 0 & .. & & \\ & .. & 0 & \alpha_j & 0 & .. & \\ & & .. & 0 & 0 & 0 & .. \\ & & & .. & 0 & ... & 0 \\ & & & & .. & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si lo miramos de forma compleja vemos en las entradas dos veces cada alfa, luego el índice es dos veces el mínimo de pesos negativos y por tanto será par.

□

Corolario 3.3.4. *La función Φ^v tiene un único máximo local.*

Usaremos el lema anterior para obtener el teorema de convexidad para toda la imagen. Ahora no consideramos sólo los puntos fijos por la acción si no la preimagen de puntos frontera. Y con la versión relativa del teorema de convexidad local (3.3.5) y el Corolario (3.3.5) veremos que está dentro de todos los conos a la vez y tiene todos los puntos frontera de esta intersección. Luego es el polítopo que definen dichos conos.

Teorema 3.3.5. *[Teorema de convexidad de la aplicación momento] La imagen de la aplicación momento $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$, de la acción $\mathbb{T} \curvearrowright (M, \omega)$, es un polítopo convexo.*

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{g}^*$ un punto de la frontera de $\Phi(M)$ y p su preimagen por la aplicación momento. Sea $H \prec G$, el estabilizador de p y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{h}^*$ los pesos de la representación de H en $T_x M$.

Por la versión relativa del teorema local de convexidad $\exists U(x)$ y $V(p)$, entornos, tal que:

$$\Phi(U) = V \cap (p + S'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

Sea $l_v = \langle \cdot, v \rangle : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall v \in \mathfrak{h}$, y S_i una componente de la frontera de $S'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Como S_i tiene como máximo $\text{codim} = 1$ podemos tomar v tal que $l_v|_{S_i} = 0$ y $l_v < 0$ en el interior de $S'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Luego si $l_v(x) = a$ se tiene:

$$\Phi^v = (l_v \circ \Phi)(q) \leq a \quad , \quad \forall q \in U.$$

Esto es, tiene un máximo local en Φ^v . Por el Corolario es un máximo absoluto, y $\Phi^v(M) \leq a$. Repitiendo para todas las caras de $S'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se tiene que $\Phi(x) \leq p + S'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Y por tanto se tiene el resultado.

□

3.4. Aplicación del teorema de convexidad, el Teorema de Schur-Horn

Empezaremos dando algunos ejemplos concretos del teorema de convexidad para seguir con su aplicación en la prueba del teorema de Schur-Horn. Para empezar veamos un par de casos de acciones en proyectivos.

Ejemplo 5. $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{CP}^1$

Consideremos el 1-toro actuando en \mathbb{CP} bajo la acción por rotaciones en una de las coordenadas,

$$\left(e^{i\theta_1}, [z_0, z_1] \right) \mapsto \left[z_0, e^{i\theta_1} z_1 \right]$$

No se ha visto durante el texto, pero las acciones de grupos abelianos no nos dan aplicaciones momentos únicas, si no aplicaciones momentos únicas bajo suma de un constante, así que tomaremos la constante según nos convenga. Para este resultado partiremos de una acción en una variedad más sencilla y por reducción veremos nuestro caso.

3.4. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CONVEXIDAD, EL TEOREMA DE SCHUR-HORN 63

Vamos pensar antes en la acción $\mathbb{S}^1 \curvearrowright (\mathbb{C}^2, \omega_{STD})$ actuando de la misma forma, esto es $(e^{i\theta_1}, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_1} z_2) \in \mathbb{C}^2$. Donde $\omega_{STD} = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^2 dz_i \wedge d\bar{z}_i = \sum dx_i \wedge dy_i = \sum r_i dr_i \wedge d\theta_i$. Con esta última expresión y unos pocos cálculos se puede ver que la aplicación momento, $\mu : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ será de la forma $\frac{-|z|^2}{2} + cte$:

$$i_{x_{\mathbb{C}}} \omega \left(\sum r_i dr_i \wedge d\theta_i \right) = - \sum r_i dr_i \wedge d\theta_i (\partial \theta_i) = - \sum r_i dr_i = \sum df_i.$$

luego como $f'_i = \left(\frac{-r_i^2}{2} \right)' = -r_i dr_i$ se tiene $f_i = \frac{-r_i^2}{2}$. Que sea G -equivariante no nos preocupa dado que es abeliano.

Si tomamos como constante $\frac{1}{2}$ tendremos que $\mu^{-1}(0) = \mathbb{S}^3$. Se tendrá, al cocientar por el grupo, que el espacio de órbitas es $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 = \mathbb{CP}^1$.

Ahora para nuestro caso consideremos la acción $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \curvearrowright (\mathbb{C}^2, \omega_{STD})$, actuando por rotaciones en cada coordenada, esto es, $((e^{i\theta_0}, e^{i\theta_1}), (z_0, z_1)) \mapsto (e^{i\theta_0} z_0, e^{i\theta_1} z_1) \in \mathbb{C}^2$. Por la acción anterior, viendo que actúa diagonalmente (cada \mathbb{S}^1 sobre un \mathbb{C}), la aplicación momento será $\mu(Z) = \frac{-1}{2}(|z_0|^2 + |z_1|^2) + \frac{1}{2}$. Por lo visto en reducción simpléctica, el espacio de órbitas reduciendo respecto del primer \mathbb{S}^1 es \mathbb{CP}^1 , y tendremos en el la acción $1 \times \mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{CP}^1$ del principio. Y por aplicación momento:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{CP} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [z_0, z_1] &\longmapsto \frac{-|z_1|^2}{2|z|^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

que está bien definida.

Los puntos fijos serán $[1 : 0]$ y $[0 : 1]$, y les corresponden por imágenes en \mathbb{R}^2 , 0 y $-\frac{1}{2}$. Esto nos da como envoltura convexa el segmento $[-\frac{1}{2}, 0]$ de la recta real.

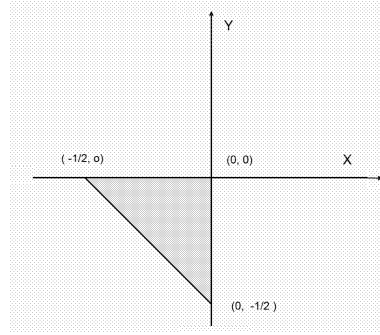
Ejemplo 6. $\mathbb{T}^2 \curvearrowright (\mathbb{CP}^2, \omega_{CAN2})$ Consideremos el toro actuando en \mathbb{CP}^2 bajo la acción por rotaciones en dos de las coordenadas,

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2} [z_0, z_1, z_2]) \longmapsto [z_0, e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2]$$

Podemos reciclar lo usado anteriormente para $\mathbb{T}^3 \curvearrowright (\mathbb{C}^3, \omega_{STD})$. En este caso tenemos también una acción diagonal tal que en cada \mathbb{C} actúa por rotaciones, y tomamos la aplicación momento con $\frac{1}{2}$ para poder reducir. Hacemos reducción respecto del primer \mathbb{S}^1 y nos queda la acción que buscamos, con momento:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{CP}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ [z_1, z_2, z_3] &\longmapsto \left(\frac{-z_1^2}{|z|^2}, \frac{-z_2^2}{|z|^2} \right) \end{aligned}$$

Los puntos fijos serán $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ y $[0 : 0 : 1]$, y les corresponden por imágenes en \mathbb{R}^2 , $(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, -\frac{1}{2})$. Esto nos da Por cómo envoltura convexa el siguiente triángulo.



A continuación vemos el teorema de Schur-Horn. Para demostrar este teorema vamos a utilizar algunas de las cosas vistas para órbitas coadjuntas y las haremos un poco más concretas para reducirnos al caso de la acción del toro sobre cada una de estas órbitas en $\mathfrak{u}(n)$.

Para empezar veremos algunas propiedades de este caso concreto. El álgebra de Lie de $U(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, son las matrices antihermíticas. Consideremos la acción por conjugación de $U(n)$ sobre las matrices hermíticas. Las matrices hermíticas las denotaremos por \mathfrak{H} :

$$\mathfrak{H} = \{B \in M_n : \overline{B}^T = B\}.$$

Dos características destacadas de las matrices hermíticas son que sus autovalores son todos reales y que siempre existe una factorización unitaria, como vemos a continuación.

Lema 8. Sea $B \in \mathfrak{H}$, todos sus autovalores son reales.

Demostración. Sean λ y v_λ , un autovalor y su correspondiente autovector de la matriz B . Se tiene que:

$$\begin{aligned} Bv_\lambda &= \lambda v_\lambda \\ v_\lambda^* B v_\lambda &= \lambda v_\lambda^* v_\lambda. \end{aligned}$$

$v_\lambda^* v_\lambda$ también es real y por tanto $v_\lambda^* B v_\lambda$, ya que:

$$(v_\lambda^* B v_\lambda)^* = v_\lambda^* B^* v_\lambda = v_\lambda^* B v_\lambda$$

luego por esta última ecuación se tiene que $\lambda \in \mathbb{R}$

□

Un razonamiento análogo nos permite ver que para las antihermíticas se tiene que todos los autovalores serán estrictamente imaginarios.

Lema 9. *Sea B una matriz hermítica existe U , matriz unitaria, tal que $U^* B U$ es una matriz diagonal formada por los autovalores de B , y las columnas de U serán sus autovectores.*

Demostración. Por el lema inmediatamente anterior sabemos que existe una matriz unitaria U tal que $U^* B U$ es triangular superior con los autovalores en la diagonal. Esta es la factorización en forma de Schur. Mirando la adjunta:

$$(U^* B U)^* = U^* B^* U = U^* B U.$$

luego será hermítica. Siendo hermítica no puede tener ceros en el término (i, j) y no tenerlos en el (j, i) . Y por tanto es diagonal. Ahora:

$$B U = [U^* B U] U$$

luego los elementos de la matriz diagonal $U^* B U$ son los autovalores de B , y U los autovectores.

□

Con lo anterior es fácil ver que las órbitas de la acción $U(n) \curvearrowright \mathfrak{H}$ por conjugación están formadas por las matrices con los mismos autovalores.

$$\mathfrak{H}_\lambda = \{A \in \mathfrak{H} : \text{ sus autovalores son } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) = \lambda\}$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Ya vimos que a las órbitas de la representación coadjunta se las puede dar una estructura de variedad simpléctica. Ahora vamos analizar más concretamente el caso de $U(n)$. Como acabamos de ver, los autovalores de las hermíticas y antihermíticas son reales y complejos puros. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(n) &\longrightarrow \mathfrak{H} \\ A &\longmapsto iA. \end{aligned}$$

nos define un isomorfismo entre $\mathfrak{u}(n)$ y \mathfrak{H} . Ahora relacionamos la acción adjunta con la coadjunta por medio de un producto interno $U(n)$ -equivariante. Ya sabemos que la acción adjunta, $U(n) \curvearrowright \mathfrak{u}(n)$, es la conjugación. Definamos en el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$ el producto interno $\langle A, B \rangle = -\text{tr}(AB)$. La simetría es directa. Por otro lado $\overline{\text{tr}(AB)} = \text{tr}(\overline{AB}) = \text{tr}(A^T B^T) = \text{tr}((AB)^T) = \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB)$, nos da que es real. Si se toma $AA = A\overline{A}^T$, se ve que todas las entradas son positivas y por tanto su traza. Luego es definido positivo. Además este producto será G -equivariante

$$\begin{aligned} \forall g \in G, (gA, gB) &= \text{tr}(gAg^{-1}gBg^{-1}) \\ &= \text{tr}((gAB)g^{-1}) \\ &= \text{tr}(g^{-1}gAB) \\ &= \text{tr}(AB) \end{aligned}$$

Como el producto interno que hemos definido es G -equivariante la acción que induce en \mathfrak{g}^* será G -equivariante. A través de este producto interno podemos definir una forma simpléctica en las órbitas de la acción coadjunta, en $\mathfrak{u}(n)^*$. Nos saltaremos este paso ya que la forma dada es la que nos pareció en la sección de representaciones adjunta y coadjunta.

Con lo anterior tenemos un isomorfismo $\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{u}(n)$. Podemos conmutar la acción adjunta con la coadjunta por el producto interno que hemos definido y que nos da un isomorfismo

3.4. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CONVEXIDAD, EL TEOREMA DE SCHUR-HORN 67

$\mathfrak{u}(n) \simeq \mathfrak{u}(n)^*$. Luego $\mathfrak{u}(n)$ será isomorfo al espacio matricial \mathfrak{H} , y además, viéndolo como tal, la acción coadjunta será la conjugación en \mathfrak{H} .

Consideremos la estructura de variedad simpléctica que admiten la órbitas coadjuntas en general. Ahora vamos a ver como restringir la acción a una de ellas, veremos que aun es hamiltoniana, y que su aplicación momento nos viene dada como la inclusión del álgebras. Luego aplicamos esto al caso concreto de $\mathbb{T} \curvearrowright O_\zeta$, con O_ζ una órbita de la coadjunta en $\mathfrak{u}(n)^*$.

Sea O_ζ la órbita coadjunta de $\zeta \in \mathfrak{g}^*$. La acción de G en ella, $G \curvearrowright O_\zeta$, preserva la forma simpléctica. De hecho, para cualquier grupo de Lie G , es una acción hamiltoniana y se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.4.1. *La inclusión $O_\zeta \xrightarrow{i} \mathfrak{g}^*$ es la aplicación momento de la acción de G en O_ζ . Y por tanto es una acción hamiltoniana.*

Demostración. Para ver que $\mu : O_\zeta \rightarrow \mathfrak{g}^*$, la inclusión, es una aplicación momento se tiene que cumplir que

$$d\mu^X(p) = i_{X_{O_\zeta}} \omega_p(\cdot)$$

para todo vector tangente X de O_ζ . Ó equivalente también

$$\langle d\mu^X, Y \rangle|_p = \omega_p(X, Y)$$

Las campos inducidos por la acción infinitesimal son los que generan el tangente a la órbita. Nos queda

$$\langle X_{\mathfrak{g}^*}(\zeta), Y \rangle = \langle \zeta, [Y, X] \rangle$$

Pero esto es precisamente lo que cumplen los campos generados por la acción infinitesimal en \mathfrak{g}^* . □

En nuestro caso vamos a trabajar con la acción del toro, \mathbb{T} , sobre las órbitas de la representación coadjunta de $U(n)$.

Ya vimos que estas órbitas eran las matrices con los mismos autovalores, \mathfrak{H}_λ . La representación coadjunta nos daba precisamente la conjugación, $U(n) \curvearrowright \mathfrak{u}(n)^*$. Usando lo anterior junto con el lema (7) se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.4.2. $\mu : \mathfrak{H}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n (\cong \mathfrak{t}^n)$, tal que a cada matriz hermítica asocia su diagonal como vector en \mathbb{R}^n , es la aplicación momento de la acción $\mathbb{T} \curvearrowright \mathfrak{H}_\lambda$.

Demostración. Por la proposición anterior se tiene que $\mathfrak{H}_\lambda \hookrightarrow \mathfrak{u}(n)^*$ es la aplicación momento de la acción de $U(n)$.

Por el Lema (7) al restringirnos a la acción de \mathbb{T} se tiene por momento

$$\mathfrak{H}_\lambda \xrightarrow{i_1} \mathfrak{u}(n)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{t}^*$$

con i la inclusión de álgebras, $\mathfrak{t} \hookrightarrow \mathfrak{u}(n)$. Que $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^n$ es claro, ya que el n -toro es el producto de n S^1 y el álgebra de este es \mathbb{R} . \mathbb{T} , como subgrupo de $U(n)$, corresponde a las matrices diagonales y unitarias, en la base canónica de \mathbb{C} . La proyección $\mathfrak{u}(n)^* \rightarrow \mathfrak{t}^*$ considerando $\mathfrak{u}(n)^* \simeq \mathfrak{H}$, por medio de $A \mapsto -iA \mapsto \text{tr}(iA)$, será la proyección de una matriz sobre las diagonales unitarias, que nos da su diagonal principal como vector en \mathbb{R}^n □

Ya tenemos definida la aplicación momento de la acción $\mathbb{T} \curvearrowright \mathfrak{H}_\lambda$, en cada órbita. Y que las órbitas \mathfrak{H}_λ son variedades simplécticas y compactas. Por tanto estamos en posición de aplicar nuestro teorema de convexidad.

Teorema 3.4.3 (Teorema de Schur-Horn). *Sea H una matriz hermítica con autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $S = \{(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \dots, \lambda_{\sigma(n-1)}, \lambda_{\sigma(n)}) | \sigma \in S_n\}$. La diagonal de H estará en la envoltura convexa de S , $\text{Conv}(S)$. Por otra parte, cada punto de $\text{Conv}(S)$ corresponde a la diagonal de una matriz hermítica, conjugada de H .*

Demostración. Consiste en aplicar el teorema de convexidad, con la aplicación momento de $\mathbb{T} \curvearrowright \mathfrak{H}_\lambda$. Lo único que no es inmediato es que los puntos fijos sean S . Pero no es difícil ver que una matriz hermítica que es fija por \mathbb{T} equivale a que es diagonal. Luego S serán los puntos fijos. □

Pasamos a continuación a ver un par de casos concretos de este teorema. Supongamos que tenemos \mathfrak{H}_λ con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, los autovalores y estos son distintos. Como vimos los puntos fijos por la acción $\mathbb{T} \curvearrowright \mathfrak{H}_\lambda$ son las matrices diagonales con estos autovalores permutados. Luego se tendrán $n!$ puntos fijos.

3.4. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CONVEXIDAD, EL TEOREMA DE SCHUR-HORN 69

Antes de ver los ejemplos, recordemos que las órbitas de la representación coadjunta son variedades compactas. Siendo la aplicación momento continua también lo será la imagen. Además se tiene que $\forall A \in \mathfrak{H}_\lambda$, $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^1 \lambda_i = \mathbf{C} = \text{cte}$. Por tanto $\mu(\mathfrak{H}_\lambda)$ estará contenida en el hiperplano

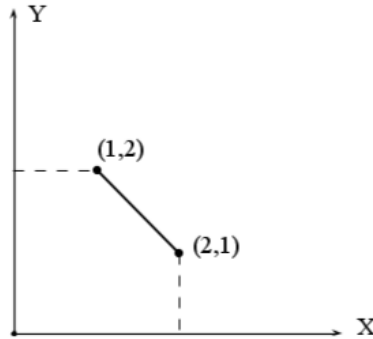
$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^1 x_i = \mathbf{C} \right\}$$

Cualquier caso concreto tiene por tanto la forma de un polígono convexo y acotado, en un hiperplano, que estará formado por la envoltura convexa de $\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_{n-1}!m_n!}$ puntos, donde m_i es el número de veces que se repite el autovalor λ_i .

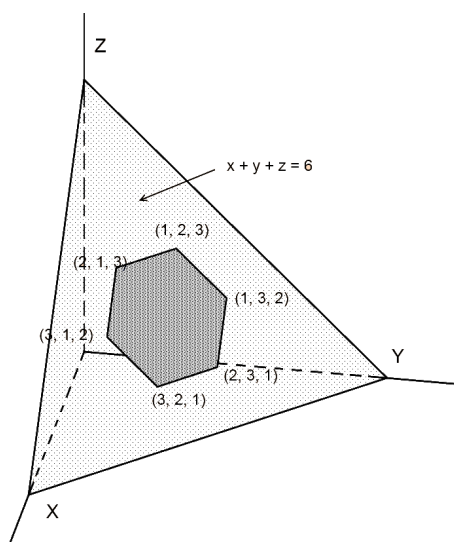
Ejemplo 7. Sea $\mathfrak{H}_{1,2} = \{A \in \mathfrak{H} : \text{con autovalores } 1, 2\}$. La aplicación momento, μ :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H}_{1,2} & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} \end{array}$$

nos dará el siguiente segmento en el plano \mathbb{R}^2 , contenido en la recta $x + y = 3$:



Ejemplo 8. Sea $\mathfrak{H}_{1,2,3} = \{A \in \mathfrak{H} : \text{con autovalores } 1, 2, 3\}$. La aplicación momento resultante es $\mu : \mathfrak{H}_{1,2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y nos da el siguiente hexágono regular contenido en el plano $x + y + z = 6$:



Bibliografía

- [1] Audin, M., Torus Actions on Symplectic Manifolds, Second revised edition, BirkhiuserVerlag, (2004)
- [2] Atiyah, M., Convexity and commuting Hamiltonians, Bull. London Math. Soc. 14 (1982), 1 – 15.
- [3] Baez, J., Lie Theory Through Examples (lectures), 2008.
- [4] Bott, R., Nondegenerate critical manifolds. Ann. of Math. 60, 248 – 261 (1954)
- [5] Bryant, R.L, An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry (lectures), Duke University (1993)
- [6] Cannas da Silva, A., Lectures on Symplectic Geometry, Springer-Verlag, (2006).
- [7] Cannas da Silva, A., Symplectic Toric Manifolds, (2001)
- [8] Guillemin, V., Sternberg, S., Convexity properties of the moment mapping, Invent. Math. 67 (1982), 491-513.
- [9] McDuff, D., Salamon, D., Introduction to Symplectic Topology, second edition, Oxford University Press Inc., (1998).
- [10] Meinrenken, E., Symplectic geometry (Lecture notes), University of Toronto,(2000)
- [11] Montgomery, D., Samelson, H., Zippin. L., Singular points of compact transformation groups. Ann. of Math. (2) 63, 1 – 9 (1956)
- [12] Mostow, G.D., On a conjecture of Montgomery. Ann. of Math. (2) 65, 513 – 516 (1957)
- [13] Sánchez Morgado, H., Introducción a la Geometría Simplética y la Dinámica Hamiltoniana, Instituto de Matemáticas (UNAM),Cd. de México.

- [14] Tábara Carbajo, J.L., Geometría Simplética, alqua, (2003).
- [15] Yang, C.T., On a problem of Montgomery. Proc. Am. Math. Soc. 8, 255 – 275 (1957)