Poisson Geometrie, Reduktion, und graduierte Mannigfaltigkeiten

Marco Zambon

Hamburg, 21. Januar 2009

Ein einfaches Beispiel

Beispiel (Reduktion)

$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ ist eine symplektische Form auf $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbb{R}^3 \times \{0\} \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^4$$

$\iota^*\omega = dx_1 \wedge dx_2$ ist keine symplektische Form auf $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$, weil $ker(\iota^*\omega) = \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_3} \neq \{0\}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \times \{0\} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^4 \\
\mathbb{R}^3 \times \{0\}/ker(\iota^*\omega) \cong \mathbb{R}^2 &
\end{tikzcd}$$

Aber $\pi_*(\iota^*\omega) = dx_1 \wedge dx_2$ ist eine symplektische Form auf $\cong \mathbb{R}^2$.

Hintergrund: Poisson Mannigfaltigkeiten

Definition (algebraische Def.)

$(M, \{\bullet, \bullet\})$ ist eine Poisson Mannigfaltigkeit, falls
$(C^\infty(M), \{\bullet, \bullet\})$ eine Lie Algebra ist, mit

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Definition (geometrische Def.)

(M, π) ist eine Poisson Mannigfaltigkeit, falls
$\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ ein Bivektorfeld ist, mit $[\pi, \pi] = 0$.

Beziehung:

$$\{f, g\} = \pi(df, dg).$$

Beispiele (von Poisson Mannigf'en)

- $\mathfrak{g}^*$ das Duale einer Lie Algebra:
  für $v, w \in \mathfrak{g} \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ definiere $\{v, w\} := [v, w]$.
- symplektische Mannigfaltigkeiten (M, ω)
  (d .h. lokal $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$):
  definiere $\pi := \omega^{-1}$.
- T^*M/G
  (Physikalisch: Poisson Mannigfaltigkeiten beschreiben mechanische Systeme mit Symmetrie).

"Gute" Untermannigfaltigkeiten:

Definition

$N \subset (M, \pi)$ ist eine koisotrope Untermannigfaltigkeit, falls $\{I, I\} \subset I$.
Hier $I = \{$Funktionen, die auf N verschwinden$\}$.

Reduktion von Poisson Mannigfaltigkeiten

Frage: Sei (M, π) eine Poisson Mannigfaltigkeit. Seien gegeben

- N eine Untermannigfaltigkeit,
- $\mathcal{F}$ eine Blätterung auf N.

Wann hat der Quotientenraum $\underline{N} := N/\mathcal{F}$ eine induzierte Poisson Struktur?

Klassisches Beispiel:
N koisotrop $\rightsquigarrow \mathcal{F} = \{\pi(df)|_N : f \in I\}$.

Marsden-Ratiu (1986):
Benötigen die Annahme, dass N eine Poisson Unteralgebra von $(C^\infty(M), \{\bullet, \bullet\})$ induziert.

Falceto-Z:
Version mit schwächeren Voraussetzungen.

Hintergrund: Generalisierte komplexe Mannigf'en

Courant Algebroide (Courant-Weinstein, 1988) sind "erweiterte Tangentialbündel" $E \to M$.

Beispiel

Sei $H \in \Omega^3_{geschlossen}(M)$. Nehme $(TM \oplus T^*M, [\bullet, \bullet]_H)$, wobei

$$[X_1 + \xi_1, X_2 + \xi_2]_H = [X_1, X_2] + \mathcal{L}_{X_1}\xi_2 - i_{X_2} d\xi_1 + i_{X_2} i_{X_1} H.$$

Definition (Hitchin, 2002)

Eine generalisierte komplexe Mannigfaltigkeit ist (M, J), wobei

$$J : TM \oplus T^*M \to TM \oplus T^*M$$

$J^2 = -1$ erfüllt und $[\bullet, \bullet]_H$ respektiert.

Beispiele fassen symplektische und komplexe Strukturen auf.
Bemerkung: J induziert eine Poisson Struktur π_J auf M!

Reduktion von generalisierten komplexen Mannigf'en

2005 sind fünf Arbeiten über Reduktion von gen. komplexen Mannigf'en *unter Gruppenwirkungen* erschienen.

Frage: gibt es $C \subset (M, J)$ mit einer kanonischen Blätterung $\mathcal{F}$, so dass $\underline{C} := C/\mathcal{F}$ eine induzierte gen. komplexe Struktur hat?

Definition (Gualtieri 2003, Kapustin-Orlov 1998)

Ein Brane besteht aus

- $C \subset M$ einer Untermannigfaltigkeit,
- $L \subset (TM \oplus T^*M)|_C$ einem *Lagrangeschen* Unterbündel über TC mit $[L, L]_H \subset L$, $J(L) = L$.

Theorem (Z)

Sei (C, L) ein Weak Brane. Dann ist C koisotrop bezüglich π_J.
Sei $\underline{C}$ der Quotient von C (falls glatt).

a) *Es gibt einen induzierten Courant Algebroid über $\underline{C}$.*

b) *J induziert eine gen. komplexe Struktur auf $\underline{C}$.*

Hintergrund: Graduierte Mannigfaltigkeiten

Definition

Sei $V = \oplus_i V_i$ ein $(\mathbb{Z} - \{0\})$-graduierter Vektorraum.
Eine graduierte Mannigfaltigkeit besteht aus

- dem “Body”: eine Mannigfaltigkeit M,
- den “Funktionen”: eine Garbe über M von graduierten kommutativen Algebren, die lokal aussehen wie

$$C^\infty(\mathbb{R}^{dim(M)}) \otimes S^\bullet(V^*).$$

($S^\bullet =$ graduierter symmetrischer Tensorprodukt).

Beispiel

Die graduierte Mannigfaltigkeit $T^*[1]M$ hat

- Body M,
- Funktionen $\Gamma(\wedge^\bullet TM) = \{$Multivektorfelder auf $M\}$.

Hier $V =$($T^*_x M$ konzentriert im Grad -1).

Poisson-Reduktion durch graduierte Mannigf'en

Bemerkung: $(T^*[1]M, \omega)$ ist eine *symplektische* graduierte Mannigfaltigkeit (vom Grad 1), wobei $\omega = \sum dx_j \wedge d\theta_j$.
(Hier sind (x_j, θ_j) "Koordinatenfunktionen" auf $T^*[1]M$.)

Fakt (Roytenberg 2000)

Poisson Struktur π *auf* M $\leftrightarrow$
Funktion $\mathcal{S}$ *vom Grad 2 auf* $T^*[1]M$ *mit* $\{\mathcal{S}, \mathcal{S}\} = 0$.

$$\pi = \pi_{ij}(x)\partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j} \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{S} = \pi_{ij}(x)\theta_i\theta_j.$$

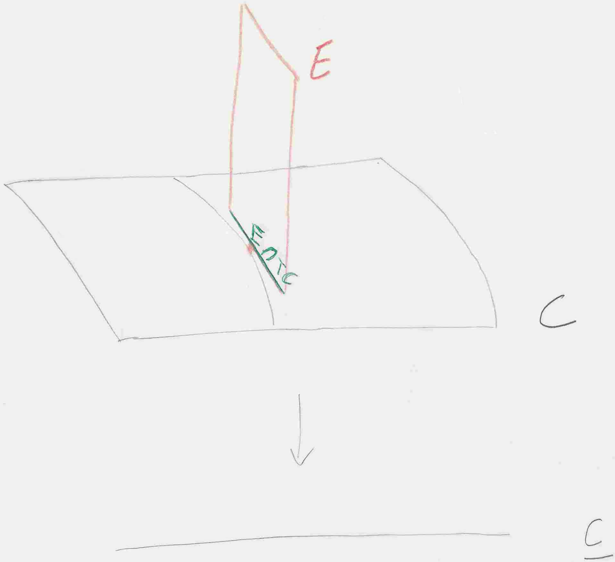
Idee für Poisson-Reduktion:

$\mathcal{C} \subset (T^*[1]M, \omega, \mathcal{S})$ prä-symplektisch, so dass $\mathcal{S}|_{\mathcal{C}}$ invariant ist

$\rightsquigarrow$ der Quotient $\underline{\mathcal{C}}$ ist symplektisch, hat eine Funktion $\underline{\mathcal{S}}$ vom Grad 2. Falls $\{\underline{\mathcal{S}}, \underline{\mathcal{S}}\} = 0$, entspricht $\underline{\mathcal{C}}$ einer neuen Poisson Mannigf't!

Klassisch:

$$\begin{aligned} C \subset M, \quad E \subset TM|_C \quad &\leftrightarrow \quad \mathcal{C} \\ C/(E \cap TC) \quad &\leftrightarrow \quad \underline{\mathcal{C}} \end{aligned}$$


E
$E \cap TC$
C
$\underline{C}$

Seien $C \subset (M, \pi)$, $E \subset TM|_C$, so dass $\underline{C} := C/(E \cap TC)$ glatt ist.

Theorem (Cattaneo-Z)

Sei $D|_C$ ein Unterbündel von $TM|_C$ mit

$$(E \cap TC) \subset D|_C \subset E,$$
$$\pi^\sharp E^\circ \subset TC + D|_C.$$

Erweitere C zu einer Untermannigfaltigkeit A mit $TA|_C = TC + D|_C$ und $D|_C$ zu einer involutiven Distribution D auf A. Nehme an, dass

$$(\mathcal{L}_{\Gamma(D)}\pi)|_C \subset E \wedge TM|_C.$$

Dann ist $\underline{C}$ eine Poisson Mannigfaltigkeit.

Beispiel

$$M = \mathbb{R}^4$$

$$\pi = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$E = Span\left(\frac{\partial}{\partial x_4} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

$$\Big\downarrow$$

$$C = \{x_4 \equiv 0\}$$

Beispiel

$$M = \mathbb{R}^4$$

$$\pi = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\begin{array}{c} E = Span(\frac{\partial}{\partial x_4} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}) \\ \Big\downarrow \\ C = \{x_4 \equiv 0\} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\underline{C} = C = \mathbb{R}^3$$

$$\underline{\pi} = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

(Poisson, falls $\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha = 0$)

Beispiel

$$M = \mathbb{R}^4$$
$$\pi = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \wedge \frac{\partial}{\partial x_4}$$
$$E = Span(\frac{\partial}{\partial x_4} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_1})$$
$$\downarrow$$
$$C = \{x_4 \equiv 0\}$$

$\rightsquigarrow$

$$\underline{C} = C = \mathbb{R}^3$$
$$\underline{\pi} = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge (\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_3})$$

(Poisson, falls $\frac{\partial}{\partial x_1}\alpha = 0$)

$$\mathcal{M} = T^*[1]\mathbb{R}^4$$
$$\mathcal{S} = \theta_1\theta_2 + \theta_3\theta_4$$

$\mathcal{C} = \{x_4 \equiv 0, \theta_4 + \alpha\theta_1 \equiv 0\}$ symplektisch

$\rightsquigarrow$

$$\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cong T^*[1]\mathbb{R}^3$$
$$\underline{\mathcal{S}} = \theta_1(\theta_2 + \alpha\theta_3)$$

Beispiel einer Differentiell graduierte Lie Algebra (DGLA):
$(\chi(T^*[1]M), [\bullet, \bullet], [X_{\mathcal{S}}, \bullet])$.

$\mathfrak{h}[1] \oplus \mathfrak{g}$: DGLA konzentriert in Grad -1 und 0
$\rightsquigarrow H \times G \rightrightarrows G$: kategorische Gruppe, d.h. Gruppe in $\{$Gruppoiden$\}$.

(M, π) Poisson Mannigfaltigkeit $\rightsquigarrow \Gamma$ symplektischer Gruppoid.

Theorem (Cattaneo-Z)

Morphismus von DGLA

$$\mathfrak{h}[1] \oplus \mathfrak{g} \to \chi^{sym}(T^*[1]M)$$

$\rightsquigarrow$ *Morphismus von Lie Algebren*

$$\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{g} \to \chi(\Gamma)$$

$\rightsquigarrow$ *Gruppenwirkung und Gruppoid-Morphismus*

$$(H \times G) \times \Gamma \to \Gamma.$$

Gen. komplexe Reduktion durch graduierte Mannig'en

Fakt (Roytenberg 2000, Grabowski 2006)

- *Courant Algebroid* $(TM \oplus T^*M, [\bullet, \bullet]_H)$ $\leftrightarrow$
  Funktion $\mathcal{S}$ *vom Grad 3 auf on* $\mathcal{M} := T^*[2]T[1]M$ *mit* $\{\mathcal{S}, \mathcal{S}\} = 0$.
- *Generalisierte komplexe Struktur* J *auf* M $\leftrightarrow$
  Funktion $\mathcal{J}$ *vom Grad 2 auf on* $\mathcal{M}$ *mit* $\{\{\mathcal{S}, \mathcal{J}\}, \mathcal{J}\}\} = -\mathcal{S}$.

Bemerkung: $\mathcal{M} = T^*[2]T[1]M$ ist ein Beispiel einer *symplektischen* graduierten Mannigfaltigkeit (vom Grad 2).

Theorem (Bursztyn-Cattaneo-Metha-Z)

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ *koisotrop* $\leftrightarrow$
  $K \to C$ *isotropes Unterbündel von* $TM \oplus T^*M$,
  F *Blätterung auf* C,
  ∇ *flacher, metrischer Zusammenhang auf* $K^\perp/K$.
- $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ *Lagrangesche Unterm't mit* $\mathcal{S}|_{\mathcal{L}} = 0, \mathcal{J}|_{\mathcal{L}} = 0$ $\leftrightarrow$
  Brane auf M

Fakt (Bursztyn-Cavalcanti-Gualtieri, 2005)

Erweiterte Wirkung auf (M, J) mit Impulsabbildung $\mu \rightsquigarrow$
$\mu^{-1}(0)/($*Wirkung*$)$ *ist wieder eine gen. komplexe Mannigfaltigkeit .*

Interpretation auf $\mathcal{M}$:

Theorem (Bursztyn-Cattaneo-Metha-Z)

- *erweiterte Wirkung mit Impulsabbildung* $\mu \quad \leftrightarrow$
  Morphismus von DGLA $\tilde{\mathfrak{g}} \to \chi(\mathcal{M})$ *mit Impulsabbildung* $\tilde{\mu}$*.*
- $\mu^{-1}(0)/($*Wirkung*$) \quad \leftrightarrow$
  übliche symplektische Reduktion $\tilde{\mu}^{-1}(0)/\tilde{\mathfrak{g}}$