



Primer examen parcial
Jueves, 17 de octubre de 2013

APELLIDOS: _____

NOMBRE: _____ DNI/NIE: _____

1. (6 puntos) Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

1. $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_2 \cdot x_3 = 0\}$.

No es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A, \text{ pero la suma } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin A.$$

2. $B = \{(x_1, x_2, x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3\}$.

No es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in B, \text{ pero } \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin B \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

3. $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 = t, x_2 = 3t, x_3 = 0, x_4 = t, t \in \mathbb{R}\}$.

Es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

$$\text{Tenemos } C = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \text{ Dado } v_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{y } v_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \text{ tenemos que } v_1 + v_2 = (t_1 + t_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pertenece a } C. \text{ Dado } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tenemos}$$

$$\text{que } \lambda \cdot v_1 = (\lambda t_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pertenece a } C.$$

2. (5 puntos) Determinar si la familia $\{(1, 1 + 2i)^T, (i, 3 + i)^T\}$ es una base del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$.

Sí, es una base. Como $\det(\mathcal{A}^2) = 2$, es suficiente demostrar que la familia dada es linealmente independiente.

Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tales que $0 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} i \\ 3+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + ic_2 \\ c_1 + 2ic_1 + 3c_2 + ic_2 \end{pmatrix}$

Entonces $c_1 = -ic_2$, y $0 = c_2(-i + 2 + 3 + i) = c_2(5)$

$\Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Por lo tanto la familia es linealmente independiente.

3. (4 puntos) Denotamos por $M_2(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices reales 2×2 . Dado un $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ el conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados:

1. $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $f(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ES lineal: dados $A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R})$, tenemos

$$f(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = f(A_1) + f(A_2).$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in M_2(\mathbb{R})$, tenemos

$$f(\lambda A) = (\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda \cdot f(A)$$

2. $g: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow V$ dada por $g(A) = A + A^T$, donde $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^T\}$.

ES lineal. Sean $A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R})$.

$$g(A_1 + A_2) = A_1 + A_2 + (A_1 + A_2)^T = A_1 + A_1^T + A_2 + A_2^T$$

$$= g(A_1) + g(A_2).$$

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_2(\mathbb{R})$. Tenemos $g(\lambda A) = \lambda A + (\lambda A)^T = \lambda A + \lambda A^T = \lambda(A + A^T) = \lambda \cdot g(A)$

3. $h: \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$ dada por $h(p(x)) = p(x+2)$.

ES lineal. Sean $p_1(x), p_2(x) \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\begin{aligned} h(p_1(x) + p_2(x)) &= (p_1 + p_2)(x+2) = p_1(x+2) + p_2(x+2) = \\ &= h(p_1(x)) + h(p_2(x)). \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$h(\lambda p_1(x)) = (\lambda p_1)(x+2) = \lambda \cdot p_1(x+2) = \lambda \cdot h(p_1(x))$$