Universidad Autónoma de Madrid — Álgebra 1. Curso 2013–14

Física.

Examen final

8 de enero de 2014

APELLIDOS: ______________ PROFESOR (YAKUBOVICH O ZAMBON): ______________

NOMBRE: ______________ DNI/NIE: ______________

INSTRUCCIONES: Entregar ÚNICAMENTE estas hojas. Se prohíbe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos moviles, y en general, de toda la tecnología moderna (posterior al bolígrafo).

En los problemas 2, 3 y 4 las respuestas deben justificarse adecuadamente.

1. (10 puntos) Marca con un círculo la respuesta correcta. No es necesario justificar la respuesta.

INFORMACIÓN: Los puntos asignados a las preguntas son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, -1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo de este problema: 0 puntos.

1. Para todo número complejo z, w se cumple $|zw| = |\bar{z}||\bar{w}|$, donde $|\cdot|$ denota la norma de un número complejo y $\bar{z}$ denota el conjugado complejo de z. V F
2. Si una matriz A de tamaño $m \times n$ define una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, entonces la matriz A^T define una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$. V F
3. El espacio vectorial de matrices 3×4 es isomorfo al espacio vectorial de matrices 2×6. V F

   Recordamos que, dados espacios vectoriales V_1 y V_2 (reales o complejos), se dice que son *isomorfos* si existe un isomorfismo lineal entre ellos.
4. Si $\langle x, y\rangle_1$ y $\langle x, y\rangle_2$ son dos productos escalares en un espacio vectorial real V, entonces $\langle x, y\rangle_3 = \langle x, y\rangle_1 + \langle x, y\rangle_2$ es también un producto escalar. V F
5. Si $\langle x, y\rangle_1$ y $\langle x, y\rangle_2$ son dos productos escalares en un espacio vectorial real V, entonces $\langle x, y\rangle_3 = \langle x, y\rangle_1 - \langle x, y\rangle_2$ es también un producto escalar. V F
6. Para todo espacio vectorial real V de dimensión finita y positiva existe un producto escalar en V. V F
7. No existe ninguna matriz de tamaño 25×75, cuyo rango sea igual a 50. V F
8. Existe una aplicación lineal sobreyectiva $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. V F
9. Para toda matriz 3×4 A y todo $b \in \mathbb{R}^3$, el sistema $Ax = b$ es compatible. V F
10. Dadas dos matrices $n \times n$ A y B, se cumple $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$. V F

Ver la ultima pagina para unas explicaciones

2. (15 puntos) Sea $\mathcal{P}_3^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de polinomios reales de grado ≤ 3. Sea W el subespacio vectorial generado por los polinomios $x^2 - x^3, 1 + 3x + x^2$ y $2 + 2x^2 - x^3$. Encuentra números reales a, b, c, d tales que

$$W = \{p \in \mathcal{P}_3^{\mathbb{R}} : a \cdot p(0) + b \cdot p'(0) + c \cdot p''(0) + d \cdot p'''(0) = 0\}.$$

Aquí p', p'', p''' denotan las derivadas primera, segunda y tercera del polinomio p.

Para encontrar las ecuaciones cartesianas de W, utilizamos el isomorfismo

$P_3^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^4, \quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \mapsto \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Ponemos los coeficientes de los 3 elementos de W como filas de una matriz:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2, \text{ y intercambiar filas}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de $A\vec{y} = \vec{0}$ son dadas por

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -3y_2 - y_3 = \frac{1}{2}y_4 - y_4 = -\frac{1}{2}y_4 \\ -6y_2 = y_4 \\ y_3 = y_4 \end{cases}$$ Poniendo $y_4 = 1$:

$$W = \left\{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 : -\frac{1}{2}c_0 - \frac{1}{6}c_1 + c_2 + c_3 = 0\right\}$$

Dado $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$, tenemos

$p(0) = c_0, \quad p'(0) = c_1, \quad p''(0) = 2c_2, \quad p'''(0) = 6c_3$.

Entonces $W = \left\{p \in P_3^{\mathbb{R}} : -\frac{1}{2}p(0) - \frac{1}{6}p'(0) + \frac{p''(0)}{2} + \frac{p'''(0)}{6} = 0\right\}$

es decir, a=-1/2, b=-1/6, c=1/2, d=1/6.

3. (25 puntos) Considera la aplicación lineal

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ T(x,y,z) = (x-z, 3x+4y-z).$$

a) Encuentra la matriz que describe la aplicación T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra la matriz que describe la aplicación T con respecto a la base $\{(1,2)^T, (3,1)^T\}$ de $\mathbb{R}^2$ y la base $\{(0,0,1)^T, (0,1,0)^T, (1,0,0)^T\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Denota C_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$, C_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$, B_2 la base arriba de $\mathbb{R}^2$, B_3 la base arriba de $\mathbb{R}^3$. Tenemos

$$[T]_{B_2 B_3} = [Id]_{B_2 C_2}\, [T]_{C_2 C_3}\, [Id]_{C_3 B_3}.$$

$$[Id]_{C_3 B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[Id]_{B_2 C_2} = \left([Id]_{C_2 B_2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces $[T]_{B_2 B_3} = \frac{1}{5} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 12 & 8 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}}$$

4. (20 puntos) Se considera la matriz

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Encontrar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que $A(\lambda)$ no es invertible;

$$\det(A(\lambda)) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} - \lambda \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (9\lambda - 4) - \lambda \cdot (9\lambda) = -9\lambda^2 + 18\lambda - 8$$

$$= -9 \cdot \left(\lambda^2 - 2\lambda + \frac{8}{9}\right) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{8}{9}}}{2} = 1 \pm \frac{1}{3} = \begin{cases} 2/3 \\ 4/3 \end{cases}.$$

Entonces $A(\lambda)$ no es invertible $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda = \frac{2}{3} \text{ o } \lambda = \frac{4}{3}}$

b) Encontrar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que la fórmula $(x, y)_1 := y^T A x$ define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Utilizamos el criterio de Sylvester.

$A(\lambda)$ es definida positiva $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ \det\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix} > 0 \\ \det(A(\lambda)) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(2 - \lambda) > 0 \\ -9\left(\lambda^2 - 2\lambda + \frac{8}{9}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \in (0, 2) \text{ y } \lambda \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Como $(x, y)_1 := y^T A x$ siempre es una forma bilineal simétrica (ya que $A(\lambda)$ es una [illegible]

bilineal simetrica (ya que A(lambda) es una matriz simetrica),
la respuesta es: lambda perteneciente al intervalo (2/3, 4/3).

Explicaciones para el problema 1:

2) A define una aplicación inyectiva $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$

$\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(A)) = n$

[utilizando $\dim(\operatorname{Im}(A)) = m - \dim(\operatorname{Ker}(A))$]

$\Leftrightarrow \operatorname{Rango}(A) = n$

$\Leftrightarrow \operatorname{Rango}(A^T) = n$

$\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(A^T)) = n$

$\Leftrightarrow$ la aplicación $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por A^T es sobreyectiva

5) Toma $\langle\ ,\ \rangle_1$ y $\langle\ ,\ \rangle_2$ iguales

8) $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3 - \dim(\operatorname{Ker}(T))$, así que $\dim(\operatorname{Im}(T)) \leq 3$, y $\operatorname{Im}(T)$ no puede ser $\mathbb{R}^4$

9) Toma $A = 0$, $b \neq \vec{0}$