Universidad Autónoma de Madrid — Álgebra 1. Curso 2013–14

Física. Grupo 516

Segundo examen parcial
Jueves, 21 de noviembre de 2013

APELLIDOS: ____________________

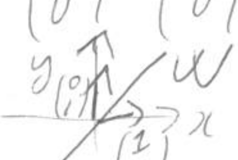
NOMBRE: ____________________ DNI/NIE: ____________________

Nota: entrega UNICAMENTE esta hoja

1. (6 puntos) Sea W la recta de ecuaciones $y = x, z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

a) Escribir la matriz de la simetría (reflexión) de $\mathbb{R}^3$ respecto a W.

Tenemos $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$. La reflexión lleva $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Lleva también $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, como es evidente considerando el plano $z = 0$:



. Por lo tanto la matriz buscada es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Hallar una base *ortonormal* de $W^\perp$, el complemento ortogonal de W.

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ tiene dimensión 1, por lo tanto $W^\perp$ tiene dimensión $3 - 1 = 2$.

Claramente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^\perp$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W^\perp$, son linealmente independientes, y son dos como la dimensión de $W^\perp$, entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $W^\perp$. Los dos vectores son perpendiculares, entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $W^\perp$

2. (5 puntos) Para cada número entero positivo $n > 1$ sea $M_{n,n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, y sea $tr(A)$ la traza de la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, definida mediante $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: la formula

$$\langle A, B \rangle := tr(AB),$$

donde A y B son elementos de $M_{n,n}(\mathbb{R})$, define un producto escalar en $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Justifica tu respuesta.

La afirmación es falsa. Tomando

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

tenemos $A \cdot A = 0$ (la matriz cero),

entonces $\langle A, A \rangle = Tr(\text{matriz cero}) = 0$.

Como $A \neq 0$, vemos que $\langle \, , \rangle$ no es definida positiva

3. (4 puntos) Determina si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: dos matrices *antisimétricas* A y B conmutan si y sólo si su producto es una matriz *simétrica*. Justifica tu respuesta.

Recuerda: por definición, A y B conmutan si $AB = BA$.

Es verdadera. Sean A, B matrices tales que $A^T = -A$, $B^T = -B$.

$AB = (-A^T)(-B^T) = A^T B^T = (BA)^T$, es decir, $(AB)^T = BA$

Entonces A y B conmutan $\Leftrightarrow AB = (AB)^T$

$\Leftrightarrow AB$ es simétrica