1^o de grado en Física, curso 2013/14
18 de diciembre de 2013

ÁLGEBRA I. HOJA 7 (REPASO)

1) Hallar los números complejos z para los cuales los vectores: $\{(z+i,1,i),(0,z+1,z),\ (0,i,z-1)\}$ no forman una base (los consideramos como vectores del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$).

Observación: En esta hoja de ejercicios (igual que en la Hoja 6), cuando nos referimos a vectores columna, muchas veces omitimos el símbolo de transposición. Estrictamente hablando, aquí se trata de vectores columna $(z+i,1,i)^T$, etc.

2) Calcular la dimensión y extraer una base del subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por

$$\big\{(1,0,1,0,1),(0,1,1,0,1),(1,1,3,1,1),(0,0,1,1,1),(0,-1,1,2,1)\big\}.$$

3) Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $\{(0,0,1,1),(1,1,0,0)\}$.

4) Estudiar si son independientes en su espacio vectorial correspondiente los siguientes conjuntos. En el caso en que sean linealmente dependientes, expresar uno de ellos como combinación lineal de los restantes:

a) $\{(1,2,0),(0,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$,

b) $\{(1,2,0),(0,1,1),(1,1,0)\}\subset\mathbb{R}^3$,

c) $\{(1,2,0),(0,1,1),(1,1,-1)\}\subset\mathbb{R}^3$,

d) $\{(1,2,0),(0,1,1),(1,1,0),(3,2,1)\}\subset\mathbb{R}^3$,

e) $\{(i,1-i),(2,-2i-2)\}\subset\mathbb{C}^2$,

f) $\{(i,1,-i),(1,i,-1)\}\subset\mathbb{C}^3$.

g) $\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&5\\0&-8\end{pmatrix}\right\}\subset\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$

h) Los polinomios $\{1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3\}\subset P^3_{\mathbb{R}}[x]$.

5) Siendo

$$B_1=\{v_1=(1,1,0,0),v_2=(0,1,0,-1),v_3=(0,1,1,0),v_4=(0,0,0,1)\},$$
$$B_2=\{w_1=(1,0,0,1),w_2=(1,0,1,0),w_3=(0,2,1,0),w_4=(0,1,0,1)\}$$

dos bases de $\mathbb{R}^4$, hallar:

a) Las coordenadas del vector $3w_1+2w_2+w_3-w_4$ en la base $B_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

b) Las coordenadas del vector $3v_1-v_3+2v_2$ en la base $B_2=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$.

c) La matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

d) La matriz de cambio de base de B_2 a B_1.

6) Averiguar si el subconjunto de las matrices escalonadas de m filas y n columnas, es un subespacio vectorial del espacio de matrices con entradas reales (o complejas) de orden $m\times n$.

7) Cualquier matriz M se expresa de forma única como suma de una matriz simétrica M_s y de una matriz antisimétrica M_{as}. Considerar en $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ las aplicaciones lineales:

a) $M\mapsto M_s$;

b) $M\mapsto M_{as}$.

Hallar el núcleo y la imagen de estas dos aplicaciones.

8) Demostrar que los siguientes determinantes son nulos:

$$a)\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ d & e & f \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad d)\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}.$$

9) Describe explícitamente el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$S := \{det(A) : A \in Mat(29, \mathbb{R}),\ AA^T = I\},$$

dando una lista de sus elementos. Aquí I denota la matriz identidad.
Respuesta: $S = \{-1, 1\}$.

10) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- **a)** Encuentra una base para el espacio de filas de A.
- **b)** Encuentra una base para el espacio de columnas de A.
- **c)** ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial $\{v \in \mathbb{R}^3 : A^T v = \vec{0}\}$?

11) Denotamos $V = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) : A = \bar{A}^T\}$ el conjunto de matrices hermíticas $n \times n$.

- **a)** ¿Es V un espacio vectorial real? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es su dimensión?
- **b)** ¿Es V un espacio vectorial complejo? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál es su dimensión?

12) **a)** Determina los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que el siguiente sistema de ecuaciones es compatible:

$$\left.\begin{aligned} 2x - ay + bz &= 3 \\ x - 3y + z &= 2 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

b) Determina los valores del parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x - ay + bz &= A \\ x - 3y + z &= B \\ x + y + z &= C \end{aligned}\right\}$$

es compatible para todos $A, B, C \in \mathbb{R}$.