1^o de grado en Física, curso 2013/14
11 de diciembre de 2013

ÁLGEBRA I. HOJA 6

1) Se considera el espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$. Calcular la dimensión del subespacio

$$T = \{A \in M_n(\mathbb{R})\colon \operatorname{tr}(A) = 0\}\,.$$

(Véase el ejercicio 7 de la hoja 4 para la definición de traza).

2) Hallar la matriz en las bases canónicas de la aplicación del espacio de los polinomios de grado ≤ 3 en $\mathbb{R}^4$ dada por $f(p(x)) = (p(-1), p(1), p(-2), p(2))$.

Observación: En esta hoja de ejercicios, cuando nos referimos a vectores columna en $\mathbb{R}^n$, omitimos el símbolo de transposición. Estrictamente hablando, aquí se trata del vector $(p(-1), p(1), p(-2), p(2))^T$.

3) Hallar las matrices en las bases canónicas de las siguientes aplicaciones:

a) La aplicación A de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y, 2x + 2y + z)$.

b) La aplicación B de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ dada por $B(z_1, z_2) = (iz_1 + 2z_2, z_1 - iz_2)$.

c) La aplicación C de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por $C(x, y, z) = (x + z, y, x + y + z)$.

d) La aplicación D de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^3$ dada por $D(z_1, z_2) = (iz_1 + z_2, z_1 + iz_2, z_1 - iz_2)$.

e) La aplicación E de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ dada por $E(x, y) = (x, x + y, 2x, x + 2y)$.

4) Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases canónicas, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)(0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

5) Dada la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$ por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en las bases $\{(0, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)(0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$, hallar la matriz de dicha aplicación en las bases canónicas.

6) Hallar, haciendo un cambio de base, la expresión matricial en la base canónica de la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1, 1, 0) = (1, 1, 1), \quad f(1, 0, -1) = (0, 1, 1) \text{ y } \quad f(1, -1, 1) = (1, 2, 2).$$

7) Determinar cuál es el núcleo y cuál es la imagen:

a) de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre una de sus rectas.

b) de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre una de sus rectas.

c) de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre uno de sus planos.

d) de una simetría ortogonal de $\mathbb{R}^2$ respecto a una de sus rectas.

e) de una simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a una de sus rectas.

f) de una simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a uno de sus planos.

8) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ en las bases canónicas por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar una base del núcleo de f.

b) Seleccionar las ecuaciones del núcleo de f.

c) Hallar una base de la imagen de f.

d) Hallar las ecuaciones cartesianas de la imagen de f.

9) Comprobar que es posible hallar una aplicación definida en $\mathbb{R}^3$ con imagen en $\mathbb{R}^3$, tal que:

a) Su núcleo es el plano de ecuación $x + y + z = 0$ y su imagen es la recta $x = y = 2z$.

b) Su imagen es el plano de ecuación $x + y + z = 0$ y su núcleo es la recta $x = y = 2z$.

c) Hallar las matrices correspondientes en la base canónica.

10) Comprobar que es posible hallar una aplicación definida en $\mathbb{R}^4$ con imagen en $\mathbb{R}^4$, tal que tanto su núcleo como su imagen sean el subespacio de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 & = 0 \\ & x_2+ & x_3 & & = 0 \end{array}\right\}$$

Hallar la matriz de dicha aplicación en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

11) Sea f un isomorfismo en $\mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ otra aplicación lineal tal que la dimensión de la imagen de $g \circ f$ es 2.

a) ¿Cuál es el rango de la matriz de g?

b) ¿Cúal es la dimensión de la imagen de $f \circ g$?

12) Encontrar los valores de a para los que los vectores $\{(a, 0, 1), (0, 1, 1), (2, -1, a)\}$ formen una base de $\mathbb{R}^3$.

13) Comprobar que una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ está formada por $\{1\}$, pero una base de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es $\{1, i\}$. Estos dos espacios vectoriales tienen distinta dimensión.

14) **a)** Escribir las matrices de cambio de base en el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales entre las bases $B_1 = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ y $B_2 =$

$\{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$.

b) Hallar las coordenadas del polinomio $1+x+x^2+x^3$ directamente en las dos bases y comprobar que están relacionadas por las matrices de cambio de base.

15) Calcular los determinantes siguientes:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sol: 12, -4, -1, -8.

16) Calcular los determinantes de las matrices dadas a continuación:

$$a) \left| \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \right| \qquad b) \left| \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix} \right|$$

Sol: a) -1, b) 1.

17) Sean A, B dos matrices cuadradas no nulas tales que $AB = 0$.

a) Demostrar que al menos una de las matrices A, B tiene determinante nulo;

b) Demostrar que ambas matrices tienen determinante nulo.

18) a) Obtener, en términos de los determinantes de los menores diagonales de la matriz A,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

(Indicación: descomponer las filas en sumandos con y sin λ).
b) Aplicar la fórmula obtenida para hallar los siguientes determinantes:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}, \qquad \left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I \right|$$

sol: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 7\lambda + 2$, $-\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + 1$

19) Sean matrices cuadradas $A \in M_{m\times m}$, $B \in M_{n\times n}$, $C \in M_{m\times n}$ y $D \in M_{(m+n)\times(m+n)}$ una matriz que se descompone por bloques como

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que $|D| = |A||B|$ utilizando la descomposición

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

b) Demostrar, utilizando una descomposición similar, la misma igualdad $|D| = |A||B|$, en el caso

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

(Nótese que ahora $C \in M_{n\times m}$).

c) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 7 & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & 4 & -2 & & & \\ & & & 1 & 4 & 5 & & \\ & & & & & & 2 & 3 \\ & & & & & & & 2 \end{vmatrix}$$

Sol: -240.

20) **a)** Demostrar que si $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ son funciones tales que existen $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ verificando

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_k(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_k(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_k) & f_2(a_k) & \cdots & f_k(a_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ son funciones linealmente independientes.

Demuestra los siguientes enunciados utilizando el apartado anterior:

b) Los polinomios $\{1, x-2, (x-2)^2, \cdots, (x-2)^n\} \subset P_{\mathbb{R}}^n[x]$ son linealmente independientes.

c) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, los polinomios $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\} \subset P_{\mathbb{R}}^n[x]$ son linealmente independientes para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

21) Encontrar bases de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

a) Las matrices diagonales.

b) Las matrices triangulares superiores.

c) Las matrices triangulares inferiores.

d) Las matrices simétricas.

e) Las matrices antisimétricas.

22) **a)** Siendo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, demostrar que los vectores:

$$u_1 = e_1, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad \cdots, \quad u_{n-1} = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1}, \quad u_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n$$

son otra base de $\mathbb{R}^n$.

b) Hallar las coordenadas de los vectores $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ y $(1, 2, \cdots, n-1, n)$ de $\mathbb{R}^n$, en la base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, donde los u_i están definidos como arriba y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

23) Hallar las coordenadas del vector $(3, 2, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$ en la base

$$B = \{(1,0,0,1), (1,0,1,0), (0,2,1,0), (0,1,0,1)\}.$$