1^o de grado en Física, curso 2013/14
11 de octubre de 2013

ÁLGEBRA I. HOJA 4

1. Sea V un espacio vectorial.

a) Suponiendo que v_1, v_2 es una familia de vectores linealmente independiente, demostrar que la familia $2v_1 + v_2, 3v_1 + 2v_2$ también lo es.

b) Supongamos ahora que v_1, v_2, v_3 es un sistema de generadores de V. Demostrar que $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ forman también un sistema de generadores de V.

2. Sea V un espacio vectorial y A una transformación lineal de V a V. Dado un polinomio $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}$, ponemos $p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^{n-k}$ (donde $A^0 := I_V$). Suponiendo que $p(0) = a_n = 0$ y que $p(A) = I_V$, demostrar que A es invertible.

Sugerencia: Considerar primero el caso de un polinomio concreto, por ejemplo, escoger $p(t) = t^4 - t$.

3. Estudiar si son subespacios vectoriales del espacio vectorial real de funciones reales de variable real los siguientes subconjuntos:

a) $S_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f(0) = 0\}$; **b)** $S_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f(1) = 0\}$;

c) $S_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f(0) = 1\}$.

4. Averiguar si son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ los siguientes subconjuntos:

a) Las matrices 2×2 con números racionales.

b) Las matrices de números reales de orden 2×2 de traza cero. (Se llama traza de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal).

c) Las matrices de números reales de orden 2×2 de rango menor o igual que 1 (son las matrices, cuyas dos columnas son linealmente dependientes).

d) Las matrices de números reales de orden 2×2 que conmutan con la matriz B, siendo B una matriz fija 2×2.

5. Averiguar si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$:

a) Las matrices diagonales.

b) Las matrices triangulares superiores.

c) Las matrices simétricas (las que satisfacen que $A^T = A$).

d) Las matrices antisimétricas (las que satisfacen que $A = -A^T$).

6. a) Halla $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal de la que sabemos que

$$T\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

b) Lo mismo sabiendo que $T\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

7. Sea $M_{m,n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, sea B^T la matriz traspuesta de B, y sea $tr(A)$ la traza de la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, definida mediante $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Probar que la traza define un producto escalar en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ mediante $(A, B) := tr(B^T A)$.

8. Sean A, B matrices de tamaños $n \times m$ y $m \times n$, respectivamente. Demostrar que $tr(AB) = tr(BA)$.

9. Probar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, con producto escalar $(A, B) = tr(B^T A)$.

10. Sea $P(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$. Probar que $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ define un producto escalar en $P(\mathbb{R})$.

11. **a)** Comprobar que $\left((a, b)^T, (c, d)^T\right)_1 := ac - 2ad - 2bc + 5bd$ define un producto escalar en el plano real.

b) Calcular las normas de los vectores $u = (1, 2)^T$ y $v = (4, 5)^T$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot, \cdot)_h$ y con respecto al producto $(\cdot, \cdot)_1$. Calcular también $(u, v)_h$ y $(u, v)_1$.

12. Hallar el ángulo entre los vectores e_1 y $(1, 1, 1)^T$ en $\mathbb{R}^3$.

13. **a)** Sean $u = (z_1, z_2)^T$ y $v = (w_1, w_2)^T$ vectores en $\mathbb{C}^2$. Comprobar que

$$(u, v)_1 := z_1\overline{w}_1 + (1 + i)z_1\overline{w}_2 + (1 - i)z_2\overline{w}_1 + 3z_2\overline{w}_2$$

define un producto hermítico en $\mathbb{C}^2$.

b) Calcular las normas de los vectores $u = (1 - i, 2 + 3i)^T$ y $v = (4 + 2i, 5 + i)^T$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot, \cdot)_h$ y con respecto al producto $(u, v)_1$. Calcular también $(u, v)_h$ y $(u, v)_1$.

14. Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

$$\left(\int_{99\pi/200}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x dx \right)^2 \leq \int_{99\pi/200}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^2 \, dx \cdot \int_{99\pi/200}^{\pi/2} (\cos x)^2 \, dx.$$

15. Sea L la recta que pasa por $(-2, 1, 3)^T$ y $(1, 2, 4)^T$. Hallar el punto de L más próximo al origen, y la distancia mínima. *Respuestas:* $(-16/11, 13/11, 35/11)^T$, $\sqrt{150/11}$.

16. Escribiendo $y = y(x)$ (de modo que x es la variable independiente), y con los datos siguientes, hallar la correspondiente recta de regresión $y = ax + b$.
Datos: $(x, y) = (1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (8, 5), (9, 7), (11, 8), (14, 9)$.

17. Encontrar el polinomio $y = ax^2 + bx + c$ que mejor se ajusta, en el sentido de los mínimos cuadrados, a los siguientes datos: $(x, y) = (-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$. Comparar gráficamente estos datos con el polinomio.

18. Escribir la matriz de la simetría (reflexión) de $\mathbb{R}^3$ respecto a:

a) El plano de ecuación y = x.
b) El plano de ecuación y = z .
c) El plano de ecuación x = z .
d) La recta de ecuaciones y = x, z = 0.
e) La recta de ecuaciones y = z , x = 0.
f) La recta de ecuaciones x = z , y = 0.

19. Hallar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por $(1, 2, 3)$ en $\mathbb{R}^3$.

20. **a)** Sea $P_2(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado ≤ 2, con el producto escalar $(f, g)_1 := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Hallar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por $1 + 3t$.

b) Hacer lo mismo para el caso cuando el producto escalar en $P_2(\mathbb{R})$ se define por $(f, g)_2 := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

¿Coinciden los complementos ortogonales en estos dos casos?