1$^o$ de grado en Física, curso 2013/14
17 de septiembre de 2013

# ÁLGEBRA I. HOJA 3

**1.** Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de matrices $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Comprobar que en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

1. La suma es asociativa.
2. Cada matriz tiene un elemento opuesto (inverso aditivo).
3. Sea $m = n$. Entonces el producto de matrices es distributivo (a derecha y a izquierda), con respecto a la suma de matrices.

**2.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, comprobar que no existe una matriz $B$ tal que $AB = I = BA$.

**3.** ¿Es cierta para matrices cuadradas la fórmula $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Probarla o dar un contraejemplo. Determinar qué sucede en el caso especial de las matrices $2\times 2$ de la forma $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$. ¿Es el producto de tales matrices conmutativo? Si son distintas de la matriz 0 ¿tienen siempre un inverso multiplicativo?

**4.** Comprobar que el producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sean ninguno de los factores, hallando el producto de las matrices $A$ y $B$ en los siguientes ejemplos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**5.** ¿Es el producto de matrices asociativo? No suponemos que las matrices son cuadradas, pero sí que los productos están bien definidos. Por ejemplo, si $A$ es $2 \times 1$, $B$ es $1 \times 2$ y $C$ es $2 \times 2$, ¿se cumple siempre que $(AB)C = A(BC)$?

**6.** ¿Es cierto que $AB = 0 \Rightarrow BA = 0$?

**7.** Hallar todas las matrices $2 \times 2$ reales, cuyo cuadrado es $-I$.

**8.** Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
determinar, qué transformación se hace en la matriz $C$ si la multiplicamos por la izquierda por la matriz diagonal $D$. Ver, qué sucede si la multiplicación por la matriz diagonal se hace por la derecha.

¿Cuáles son las matrices diagonales que conmutan con todas las demás?

**9.** Demostrar que una matriz no diagonal nunca conmuta con todas las demás. Deducir de este ejercicio y del anterior la forma general de las matrices que conmutan con todas las demás.

**10.** Se dice que una matriz cuadrada es *elemental* si se obtiene de la matriz identidad, haciendo alguna de las siguientes transformaciones:

a) Permutar dos filas.
b) Sumarle a una fila otra distinta, multiplicada por un número.
c) Multiplicar una fila por un número distinto de cero.

Escribir todas las matrices elementales $2 \times 2$ y unos cuantos ejemplos de matrices elementales $3 \times 3$.

Escoger una matriz $A$ cualquiera y comprobar que al multiplicarla por la izquierda por una matrix elemental $B$, $A$ se somete a la misma transformación que se había aplicado para obtener la matriz elemental $B$.

**11.** Una matriz *simétrica* (respectivamente, *antisimétrica*) es aquella que cumple $A = A^T$ (respectivamente, $A = -A^T$), siendo $A^T$ la matriz traspuesta de $A$.

Probar que una matriz antisimétrica tiene nulos todos los elementos en la diagonal principal.

**12.** Probar que:

1. Dada una matriz cuadrada $A$, la matriz $1/2(A + A^T)$ es simétrica.
2. Dada una matriz cuadrada $A$, la matriz $1/2(A - A^T)$ es antisimétrica.
3. Toda matriz cuadrada se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Entre las matrices cuadradas complejas se definen las matrices *hermíticas* como aquellas que verifican $a_{ij} = \overline{a_{ji}}\ \forall i, j$ (o bien, $A = \overline{A^T}$). Respectivamente, las *antihermíticas* como aquellas que verifican $A = -\overline{A^T}$. Demostrar lo siguiente:

**13.** Todos los elementos de la diagonal principal de una matriz hermítica son reales.

**14.** Todos los elementos de la diagonal principal de una matriz antihermítica son imaginarios puros.

**15.** Una matriz a la vez hermítica y antihermítica ha de ser la matriz nula.

**16.** Toda matriz cuadrada compleja se puede escribir como suma de una matriz hermítica y otra antihermítica.

**17.** Comprobar que el producto de matrices simétricas no siempre es una matriz simétrica, haciendo el cálculo en los casos:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ ;\qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que en el caso 1), $AB = (BA)^T$, mientras que en el caso 2), $AB = BA$ (esto es, $A$ y $B$ *conmutan*).

**18.** Demostrar que dos matrices simétricas $A$ y $B$ conmutan si y sólo si su producto es una matriz simétrica. Encontrar matrices simétricas que conmuten y las que no conmuten, distintas de las del ejercicio anterior.

**19.** Probar que si $A$ es simétrica y $B$ antisimétrica, $A$ y $B$ conmutan si y sólo si su producto es una matriz antisimétrica.

**20.** Demostrar que toda matriz simétrica real o compleja $2 \times 2$ que conmute con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un múltiplo de la identidad.