1^o de grado en Física, curso 2013/14
6 de noviembre de 2013

ÁLGEBRA I. HOJA 5

Problemas de libro Linear Algebra Done Wrong (LADW) de Treil:

- p.46 2.1-2.2;
- p.51 3.1-3.9;
- pp.55-56, 5.1-5.6;
- pp 58-59 6.1-6.2.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} x+2y-z & = & 7 \\ 2x+y+z & = & 6 \\ x-y+3z & = & -1 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y-5z-2 & = & 0 \\ 3x-y+2z+1 & = & 0 \\ 5x+4y-6z-3 & = & 0 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+4z+8t & = & -1 \\ x+3y-6z+2t & = & 3 \\ 3x-2y+2z-2t & = & 8 \\ 2x-y+2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Se pueden comprobar los resultados obtenidos por substitución o aplicando el método de Gauss.

Sol: a)(5/3,8/3,0), b)(-1/5,14/5,6/5), c)(2,-3,-3/2,1/2).

2. Hallar los valores de a para que los siguientes sistemas sean compatibles indeterminados.

$$a)\ \left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{r} ax+y+2z=-2 \\ 2x+y+az=3 \\ x+ay+2z=-2 \end{array}\right\} \qquad c)\ \left.\begin{array}{r} -x+ay+az=0 \\ ax-y+az=0 \\ ax+ay-z=0 \end{array}\right\}$$

sol: a) $a=-2$ ó $a=1$ b) $a=-3$ ó $a=1$ c) $a=-1$ ó $a=\frac{1}{2}$

3. Estudiar los rangos de las siguientes matrices como función de λ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Encontrar bases de los siguientes subespacios:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_3+2x_4=0 \\ x_1-x_3=0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5 \qquad \left.\begin{array}{r} 3x_1-x_2+3x_3-x_4+3x_5=0 \\ 3x_1+x_2+3x_3+x_4+3x_5=0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5$$

5. Encontrar una base del subespacio $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rrrr} 2a & +b & -c & +d = 0 \\ a & +b & +c & -d = 0 \end{array} \right\}$$

6. Encontrar una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres divisibles por $x - 1$.

7. Comprobar que el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,0,1,-1)^T, (1,-1,1,-1)^T\}$ coincide con el espacio de soluciones del sistema:

$$\left. \begin{array}{llll} x_1 & +x_3 & +2x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_3 & & = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

8. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Span}\{(1,0,1,0)^T, (2,1,0,-1)^T, (1,-1,3,1)^T\}, \\ S_2 &= \text{Span}\{(3,1,0,-1)^T, (1,1,-1,-1)^T, (7,1,2,-1)^T\}, \\ S_3 &= \text{Span}\{(0,2,5,0)^T\}. \end{aligned}$$

9. Siendo $S_1 = \text{Span}\{(1,-5,2,0)^T, (1,-1,0,2)^T\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(3,-5,2,1)^T, (2,0,0,1)^T\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \cap S_2$.

10. Sean

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Span}\{(1,0,1,0,1)^T, (2,1,0,-1,0)^T, (2,0,1,0,1)^T\}, \\ S_2 &= \text{Span}\{(3,1,0,-1,0)^T, (1,1,-1,-1,-1)\}^T. \end{aligned}$$

Comprobar que $S_1 + S_2 = S_1$ y $S_1 \cap S_2 = S_2$.

11. Siendo $S_1 = \text{Span}\{(0,1,1,0)^T, (1,0,0,1)^T\}$ y

$$S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & & = 0 \end{array} \right.$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.

12. Comprobar que son complementarios los subespacios definidos por las ecuaciones:

$$S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lllll} -2x_1 & -5x_2 & +4x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & +7x_2 & & +4x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \right.$$

13. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de un espacio complementario de

a) $S_1 = \text{Span}\{(0,2,5,0)^T, (-1,1,3,2)^T\}$.

b) $S_2 = \text{Span}\{(1,1,0,0)^T, (1,0,1,0)^T, (0,0,1,1)^T, (0,1,0,1)^T\}$.

14. Hallar una base de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$, donde

$$S_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad S_2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hallar también las ecuaciones cartesianas de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$.

15. En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios que conmutan con cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar una base de cada uno de ellos, de su suma y de su intersección.

b) Hallar una base de un espacio complementario del subespacio de las matrices que conmutan con A.

16. Hallar los subespacios suma e intersección de los siguientes subespacios de las matrices cuadradas de orden n:

a) El subespacio de las matrices triangulares superiores de orden n y el subespacio de las matrices triangulares inferiores.

b) El subespacio de las matrices simétricas de orden n y el subespacio de las matrices antisimétricas de orden n.

17. Consideramos los subespacios del espacio de polinomios de grado ≤ 3 S_1, formado por los polinomios múltiplos de $x + 1$, y S_2, formado por los polinomios múltiplos de $x - 1$. Hallar los subespacios suma e intersección de S_1 y S_2.

18. En $\mathbb{R}^4$ sean $U = \mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$ y $V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ donde

$$u_1 = (1, 1, 2, -\lambda)^T, \quad u_2 = (-1, 1, 0, -\lambda)^T, \quad v_1 = (1, \lambda, 2, -\lambda)^T, \quad v_2 = (2, 3, \lambda, 1)^T.$$

Hallar según los valores de λ las dimensiones de U , V, $U + V$ y $U \cap V$.