1^o de grado en Física, curso 2013/14

ÁLGEBRA I. HOJA 1

1. Escribir en coordenadas polares $4+i, -3/2-i/2, -1+2i$.

2. Comprobar que $(1+i)^{12} = -64$, y $((1-i)/\sqrt{2})^{-6} = -i$.

3. Usando $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, donde x es un número real, demostrar que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ y $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$.

4. Describir el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:
   (i) $|z-2| > |z+2|$; (ii) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.

5. Demostrar las fórmulas:
   (i) $|z+1|^2 - |z-1|^2 = 4 \operatorname{Re} z$; (ii) $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 2 + 2\,|z|^2$.

6. Resolver $z^3 = i$ en coordenadas polares y rectangulares. (Recordatorio: las coordenadas rectangulares, o cartesianas, son de la forma $a+ib$; las polares, $re^{i\alpha}$).
   Solución (parcial): $\sqrt{3}/2 + i/2, -\sqrt{3}/2 + i/2, -i$.

7. Resolver $iz + (2-10i)z = 3z + 2i$.
   Respuesta: $-9/41 - i/41$.

8. Resolver $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$.
   Respuesta: $2-i, 1+2i$.

9. Resolver: **(a)** $z^2 = -8-6i$; **(b)** $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$; **(c)** $z^2 + 2z + 1 - 8i = 0$.

10. Resolver las ecuaciones
    (a) $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$;; **(b)** $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$.

11. Encontrar todos los autovalores complejos de las siguientes matrices:
    (a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; **(c)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Escribir $\sum_{n=0}^{99} (i+1)^n$ en coordenadas rectangulares y polares. Respuesta: $(1+2^{50})i$.

13. Demostrar que para todo polinomio $p(z)$ con coeficientes reales, $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

14. Hallar un número complejo en forma binómica $a+bi$ tal que $(a+bi)^2 = 1+i$.

15. Calcular en forma binómica y en forma trigonométrica los siguientes números complejos:
    $$\sqrt{1+i}, \qquad \sqrt{-2+2i}.$$
    Comparando las expresiones determinar el valor de $\cos(\pi/8)$ y $\cos(3\pi/8)$.
    Comprobar que $\cos^2(\pi/8) + \cos^2(3\pi/8) = 1$. ¿Por qué?

16. Demostrar

    a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;   b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

17. Hallar las raíces cuartas de $-i$ y representarlas gráficamente.

18. Hallar las siguientes raices:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt[6]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

    ¿Cómo están relacionadas entre sí?

19. Comprobar que $(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1)(x - 1) = x^n - 1$. Deducir las siguientes propiedades.

    a) Las soluciones complejas y las soluciones reales de $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ son raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad.
    b) Las raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad que no coinciden con 1, son soluciones de la ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$.
    c) La ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real.
    d) Demostrar que la ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real si n es par y tiene exactamente una solución real si n es impar. ¿Cuál es la solución real si n es impar?

20. Deducir de la fórmula de De Moivre $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$:

    a) las fórmulas del coseno del ángulo triple y del seno del ángulo triple;
    b) las fórmulas análogas para el ángulo quíntuple.

21. Hallar $\cos(\pi/12)$ calculando la raíz de $e^{i\pi/6}$.