Ing. informática.

Examen final
13 de enero de 2014

APELLIDOS: ______________________ PROFESOR (FUERTES, VILLAMAYOR O ZAMBON): ____
NOMBRE: ______________________ DNI/NIE: ______________________

Puntos obtenidos:
(deja esta tabla vacía)

Ej. 1	
Ej. 2	
Ej. 3	
Ej. 4	
Ej. 5	
Ej. 6	
Total (de 100)	

Todas las respuestas requieren una justificación, excepto en el problema 1. En los problemas en que aparece una caja, pon tu respuesta en la caja y la justificación debajo de ella.

Problema 1. (20 puntos) Marca con un circulo la respuesta correcta. No es necesario justificar la respuesta.

1. Sea A un conjunto de 5 elementos y B un conjunto de 7 elementos. Entonces el producto cartesiano $A \times B$ tiene 12 elementos — V F
2. Para cada número entero positivo a existe un número primo p y un entero $n \geq 0$ tal que $p^n = a$ — V F
3. Dados números enteros positivos a, b existen enteros n, m tales que $an + bm = 1$ — V F
4. Todo sistema de ecuaciones cartesiano (o equivalentemente, homogéneo), es compatible. — V F
5. Para toda matriz cuadrata A y $\lambda \in \mathbb{R}$: $det(\lambda A) = \lambda det(A)$. — V F
6. Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $det(A) \neq 0$ — V F
7. Si A y B son matrices cuadradas invertibles, entonces $A + B$ también es invertible — V F
8. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una familia linealmente independiente de vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. — V F
9. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. — V F
10. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño, y ambas invertibles. Entonces
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
V F

Problema 2. (15 puntos)

(a) Sea $X = 3\mathbb{Z}(= \{3 \cdot n;\ n \in \mathbb{Z}\})$. Definimos en X la relación aRb si $a - b$ es múltiplo de 12.

(i) Demuestra que la relación es de equivalencia.

Sean $a, b, c \in X$

R es reflexiva: aRa, porque $a-a=0$ es múltiplo de 12

R es simétrica: $a-b$ es múltiplo de 12 $\iff$

$(b-a) = -(a-b)$ es múltiplo de 12

R es transitiva: $a-b$ y $b-c$ múltiplos de 12 $\Rightarrow$

$a-c = (a-b)+(b-c)$ es múltiplo de 1

(ii) Indica cuantos elementos tiene el conjunto de clases de equivalencia.

Respuesta: $\boxed{4}$

(Los elementos son $\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}$)

(b) Sea

$$X = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2;\ 0 \leq a \leq 2;\ 0 \leq b \leq 2\}.$$

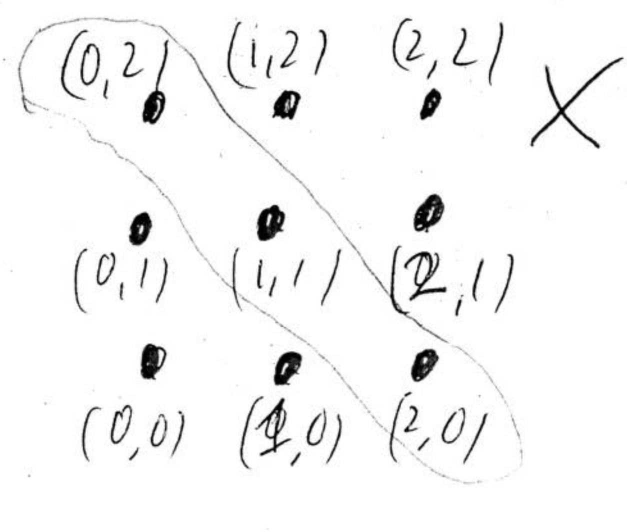
Definimos en X la relación de equivalencia $(a, b)R(a', b')$ si $a + b = a' + b'$.

Indica cuantos elementos hay en la clase de equivalentes del elemento $(1, 1)$.

Respuesta: $\boxed{3}$

La clase de equivalencia de $(1,1)$ es

$\{(1,1),(2,0),(0,2)\}$



Problema 3. (10 puntos)

(a) Halla el menor entero $d \geq 2$ que pertenezca a

$$10\mathbb{Z} \cap 22\mathbb{Z}.$$

Respuesta: $\boxed{d = 110}$

$10\mathbb{Z} \cap 22\mathbb{Z} = \{\text{comunes múltiplos de } 10 \text{ y } 22\}$,

entonces estamos buscando el mínimo común múltiplo de $10 = 2 \cdot 5$ y $22 = 2 \cdot 11$, que es $2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$.

(b) A, B y C son tres amigos que viven en Madrid.

A viaja a Zaragoza cada 8 días, B lo hace cada 20 días, y C cada 10 días. ¿Cada cuántos días coinciden los tres amigos en Zaragoza.?

Respuesta: $\boxed{40}$

Buscamos el mínimo común múltiplo de $8 = 2^3$, $20 = 2^2 \cdot 5$ y $10 = 2 \cdot 5$, es decir, $2^3 \cdot 5 = 40$

Problema 4. (20 puntos)

En este problema denotaremos por $\overline{a}$ a la clase de equivalencia de un entero a.

(a) Demuestra que $\overline{7} \in \mathbb{Z}_{15}^*(= U(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}))$ y **expresa su inverso multiplicativo en la forma** $\overline{a}$ **para un entero** a, **con** $0 \leq a \leq 14$.
(Recuerda: inverso multiplicativo=opuesto con respecto a la multiplicación.)

Respuesta: $\boxed{\overline{13}}$

$\overline{7} \in \mathbb{Z}_{15}^*$ porque m.c.d. $(7,15) = 1$.

Hallamos su opuesto (= inverso). $\forall a \in \mathbb{Z}$:

$\overline{7}\,\overline{a} = \overline{1} \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Z}: 7a + 15b = 1$.

Tenemos $15 = 2 \cdot 7 + 1$, entonces $7(-2) + 15 \cdot 1 = 1$,

entonces $\overline{-2} = \overline{13}$ es el inverso de $\overline{7}$.

(b) Decide si la ecuación $\overline{7}X = \overline{2}$ tiene solución en el anillo $\mathbb{Z}_{15}(= \mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$. En caso afirmativo exprésala en la forma $\overline{b}$ para un entero b, con $0 \leq b \leq 14$ (Sugerencia: utiliza el apartado anterior).

Respuesta: $\boxed{\overline{11}}$

Sí, tiene solución

Por a), sabemos que $\overline{7}\,(\overline{-2}) = \overline{1}$.

Multiplicando esta ecuación por 2 obtenemos $\overline{7}\,(\overline{-4}) = \overline{2}$, y $\overline{-4} = \underline{11}$

Problema 5. (15 puntos)

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, considera el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, halla todas las soluciones del sistema.

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & \lambda & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 \to F_3 - 2F_1, \\ F_2 \leftrightarrow F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & \lambda & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{F_3 \to F_3 - 3F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & (\lambda-6) & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 + (\lambda-6)F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2(\lambda-6) & -(\lambda-6) \end{array}\right).$$

Si $\lambda \neq 6$ obtenemos

$-2z = -1 \Rightarrow z = +\frac{1}{2}$

$-y - 2z = -1 \Rightarrow y = -2z + 1 = 0$

$x + 2y + z = 1 \Rightarrow x = -2y - z + 1 = \frac{1}{2}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ +1/2 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = 6$, entonces z es una variable libre,

$y = -2z + 1$, $x = -2y - z + 1 = -2(-2z+1) - z + 1 = +3z - 1$, entonces

Las soluciones son $\left\{ z \cdot \begin{pmatrix} +3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) Para cuales valores de λ es el sistema compatible?

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Problema 6. (20 puntos) Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Sea V el subespacio dado por

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

(a) Halla la dimensión de U.

Respuesta: $\boxed{3}$

La matriz $(1\ 1\ 1\ 1)$ tiene rango 1, y por Rouché-Frobenius $\dim(U) = 4 - 1 = 3$.

(b) Halla la dimensión de V.

Respuesta: $\boxed{1}$

[Ya que $V = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

(c) Halla la dimensión de $U \cap V$.

Respuesta: $\boxed{0}$

Sea $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Si $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ y $x_1=x_2=x_3=x_4$, entonces este vector tiene que ser el vector cero.

(d) Halla la dimensión de $U + V$ (Sugerencia: utiliza los apartados anteriores).

Respuesta: $\boxed{4}$

$\dim(U+V) = 4$, ya que

$$\begin{aligned}\dim(U+V) &= \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)\\ &= 3 + 1 - 0\\ &= 4\end{aligned}$$