



Tercero examen parcial
Miércoles, 11 de diciembre de 2013

APELLIDOS: _____

NOMBRE: _____ DNI/NIE: _____

Problema 1. (4 puntos) Halla una matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$ que verifique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para todo $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

tiene solución $\begin{cases} x=c \\ y=d-c \end{cases}$. Entonces la matriz buscada

es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2. (4 puntos) Describe explícitamente el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$S := \{\det(A) : A \in \text{Mat}(9, \mathbb{R}), AA^T = I\},$$

dando una lista de sus elementos. Aquí I denota la matriz identidad.

Si $AA^T = I$, entonces

$$1 = \det(I) = \det(AA^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) \\ = [\det(A)]^2. \text{ Por lo tanto } \det(A) \in \{\pm 1\}.$$

Como $\det(I) = 1$ y $\det(-I) = -1$, entonces $S = \{-1, 1\}$.

Problema 3. (4 puntos) Fijamos vectores $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (-1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Decide, en cada uno de los siguientes casos, si existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de modo que

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$

En caso afirmativo exhiba valores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, para los que se cumpla la igualdad.

i) $w = (1, -1, 1)$

Resolvemos el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Con el método de Gauss: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, que corresponde al sistema $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$, luego solución es $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $w = (1, -1, 0)$

Hay que resolver el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Con el método de Gauss: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$. La tercera ecuación tiene una fila de la forma $000|c$, con $c \neq 0$, entonces no hay solución.

Problema 4. (4 puntos) Encuentra A^{-1} , la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_3 \rightarrow F_3 - F_4 \\ F_2 \rightarrow F_2 - F_3 \\ F_1 \rightarrow F_1 - F_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$