

Primer examen parcial
Miércoles, 2 de octubre de 2013

APELLIDOS: _____

NOMBRE: _____ DNI/NIE: _____

--	--	--	--

Problema 1. (4 puntos)

Definimos los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}, \quad (= \mathbb{R} - \{\pm 1\})$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\} \quad (= \emptyset)$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / (x+1)^3 = 0\} \quad (= \{-1\})$$

Cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} es finito. Indica en cada caso si se trata del vacío, y en caso contrario debes indicar cuales son sus elementos:

$$(a) B \setminus A = \{1\}$$

$$(b) B \cap D = \emptyset$$

$$(c) E \setminus D = \{-1\}$$

$$(d) E \cap C = \{-1\}$$

Problema 2. (4 puntos) Describe los siguientes subconjuntos (indicando cuales son sus elementos si fueran finitos).

Recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$(a) A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 16\}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(b) B = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 \leq 16\}$$

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$$

$$(c) C = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 100 \text{ y existe un } z \in \mathbb{Z} \text{ con } x = 2z\}$$

$$\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, 8, -8\}$$

(d) $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1, \text{ y } a = b\}$

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Problema 3. (4 puntos) Comprobar que las siguientes relaciones son de equivalencia, describir sus clases de equivalencia e indica cuántos elementos tienen sus conjuntos cocientes:

(a) En el conjunto $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 7\}$ con la relación: $a R b$ si $a^2 = b^2$.

R es una relación de equivalencia: sea a, b, c elementos del conjunto. Tenemos:

- $a R a$, porque $a^2 = a^2$
- $a R b \Rightarrow b R a$, porque $a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2$
- $a R b$ y $b R c \Rightarrow a R c$, porque $a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2$.

Las clases de equivalencia son:

$$[0] = \{0\}$$

$$[1] = \{1, -1\}$$

$$[2] = \{2, -2\}$$

$$[7] = \{7\}$$

El conjunto cociente tiene 4 elementos

(b) En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la relación: $a R b$ si $ab > 0$.

R es una relación de equivalencia: sea

$a, b, c \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Tenemos

- $a R a$, porque $a^2 > 0$
- $a R b \Rightarrow b R a$, porque $ab = ba$
- $a R b$ y $b R c \Rightarrow a R c$, porque $ab > 0$ y $bc > 0$ implica que $abc > 0$, y que $ac > 0$.

Las clases de equivalencia son

$$[1] = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x > 0\}$$

$$[-1] = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x < 0\}$$

El conjunto cociente tiene dos elementos.