

**Primer examen parcial**  
**Miércoles, 2 de octubre de 2013**

APELLOS: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_ DNI/NIE: \_\_\_\_\_

**Problema 1.** (4 puntos)Definimos los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}, \quad (\mathbb{R} - \{\pm 1\})$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\}, \quad (\emptyset)$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / (x+1)^3 = 0\}, \quad (\{-1\})$$

Cada uno de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$  es finito. Indica en cada caso si se trata del vacío, y en caso contrario debes indicar cuales son sus elementos:

$$(a) B \setminus A. = \{1\}$$

$$(b) B \cap D. = \emptyset$$

$$(c) E \setminus D. = \{-1\}$$

$$(d) E \cap C. = \{-1\}$$

**Problema 2.** (4 puntos) Describe los siguientes subconjuntos (indicando cuales son sus elementos si fueran finitos).Recuerda que  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .  $\{0, 1, 2, \dots\}$ 

$$(a) A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 16\}$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(b) B = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 \leq 16\}$$

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4\}$$

$$(c) C = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 100 \text{ y existe } z \in \mathbb{Z} \text{ con } x = 2z\}$$

$$\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, 8, -8\}$$

$$(d) D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1, y a = b\}$$

$$\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

**Problema 3.** (4 puntos) Comprobar que las siguientes relaciones son de equivalencia, describir sus clases de equivalencia e indica cuántos elementos tienen sus conjuntos cocientes:

(a) En el conjunto  $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 7\}$  con la relación:  $a R b$  si  $a^2 = b^2$ .

$R$  es una relación de equivalencia: los  $a, b, c$  elementos del conjunto. Tenemos:

- $a Ra$ , porque  $a^2 = a^2$
- $a R b \Rightarrow b R a$ , porque  $a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2$
- $a R b$  y  $b R c \Rightarrow a R c$ , porque  $a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2$ .

Las clases de equivalencia son:

$$[0] = \{0\} \quad [1] = \{1, -1\} \quad [2] = \{2, -2\} \quad [7] = \{7\}$$

El conjunto cociente tiene 4 elementos

(b) En  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , con la relación:  $a R b$  si  $ab > 0$ .

$R$  es una relación de equivalencia: los  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tenemos

- $a Ra$ , porque  $a^2 > 0$
- $a R b \Rightarrow b R a$ , porque  $ab = ba$
- $a R b$  y  $b R c \Rightarrow a R c$ , porque  $ab > 0$  y  $bc > 0$  implica que  $ab^2c > 0$ , y que  $ac > 0$ .

Las clases de equivalencia son

$$[1] = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x > 0\} \quad [-1] = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x < 0\}$$

El conjunto cociente tiene dos elementos.