ÁLGEBRA. HOJA 7.

1) Decide si el vector $\vec{v} = (1,0,1,0)$ es combinación lineal de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4$ para

$$\vec{v}_1 = (1,1,0,1),\ \vec{v}_2 = (1,0,1,1)\ \text{ y }\ \vec{v}_3 = (1,0,0,-1).$$

2) Halla una base y calcula la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales.

a) $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^4$ definido por:

$$\mathbb{S} = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

b) $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^4$ definido por:

$$\mathbb{S} = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

3) Halla una base de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$ donde

$$\vec{v}_1 = (1,-1,0,0),\ \vec{v}_2 = (2,0,-1,-1),\ \vec{v}_3 = (1,0,0,-1),\ \vec{v}_4 = (1,-1,1,-1).$$

b) $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ generado por $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^3$ siendo

$$\vec{v}_1 = (1,-1,0),\ \vec{v}_2 = (1,0,-1),\ \vec{v}_3 = (2,-1,-1),\ \vec{v}_4 = (-1,-1,2).$$

4) Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1,1,-1,2)$ y $(-1,2,3,3)$. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1,7,3,12)$ y $(-4,5,1,1)$. Sea $W = U + V$.

a) Halla bases de los subespacios U, V y W. Indica cuál es la dimensión de $U \cap V$.

b) Halla un sistema ecuaciones de W con el menor número de ecuaciones.

c) Demuestra que $(2,-3,5,7) \notin W$.

d) Demuestra que el vector $\vec{w} = (27,0,27,57)$ está en W y halla $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in V$ tales que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

5) Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,4,-2,3)$ y $(2,3,-1,1)$. Sea V el subespacio de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + \ \ x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sea W el subespacio suma $U + V$.

a) Demuestra que W es la suma directa de U y V, es decir, demuestra que $W = U \oplus V$.

b) Demuestra que el vector $\vec{w} = (19,-72,90,-75)$ está en W. Halla $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in V$ tales que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

6) Sea $a \in \mathbb{R}$. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 \qquad + x_3 + ax_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Halla los valores de a para los que $U \cap V \neq \{\vec{0}\}$. Para esos valores, calcula una base de $U \cap V$ y un sistema de ecuaciones de $U \cap V$ con el menor número de ecuaciones.

b) Para $a = -4$, halla $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in V$ tales que $(3, 1, -2, 2) = \vec{u} + \vec{v}$.

7) Sean U y V subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ tales que $U \subset V$. Halla $U \cap V$ y $U + V$.