

ÁLGEBRA. HOJA 6.

1) Calcula los siguientes determinantes:

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} & b) & \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} & c) & \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} & d) & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \\
 e) & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Solución: a) 63; b) 0; c) $(x-a)^3(3a+x)$; d) 5; e) $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$.

2) Utilizando determinantes, calcula, cuando exista, la inversa de las siguientes matrices

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ b & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución: a) No existe; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{3a+2b-2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ b+2 & -a-b & -a+2 \\ b-4 & 2a+b & -a-2 \end{pmatrix}$ si $3a+2b-2 \neq 0$; no existe si $3a+2b-2 = 0$.

3) Decide, usando determinantes, si la matriz de coeficientes de los siguientes sistemas de ecuaciones es invertible. Cuando lo sea, calcula la solución del sistema usando la regla de Cramer.

$$a) \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ ax_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned} \right\} \quad b) \left. \begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= b \\ x_1 - 3x_2 &= -4 \\ x_1 + ax_2 - x_3 &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Solución: a) No es invertible si $a = \frac{2}{5}$; cuando $a \neq \frac{2}{5}$ la solución es $\left(\frac{5}{5a-2}, \frac{25a-17}{5a-2}, \frac{5a-5}{5a-2}\right)$;

b) $\left(\frac{3b}{2} + 8, \frac{b}{2} + 4, \frac{4a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{ab}{6} + \frac{4}{3}\right)$.

4) Comprueba que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$