ÁLGEBRA. HOJA 5.

1) Aplica el método de Gauss para discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x_2-3x_3=-5\\ 2x_1+3x_2+3x_3=7\\ 4x_1+5x_2-2x_3=10\end{array}\right\}\quad b)\ \left.\begin{array}{r} 3x_1-10x_2-x_3=-15\\ 2x_1+2x_2+3x_3=6\\ x_1+14x_2+7x_3=-1\end{array}\right\}\quad c)\ \left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=2\\ -x_1+x_2+x_3=1\\ -x_1+3x_2+3x_3=4\end{array}\right\}$$

$$d)\ \left.\begin{array}{r} 2x_1-2x_2+x_3=9\\ 3x_1-5x_2+2x_3=4\\ 3x_1+3x_2-x_3=9\end{array}\right\}\quad e)\ \left.\begin{array}{r} x_1-2x_2+x_3=7\\ 3x_1+2x_2-x_3=1\\ 2x_1-5x_2+2x_3=6\end{array}\right\}\quad f)\ \left.\begin{array}{r} x_1-3x_2+2x_3=0\\ -x_1-2x_2+2x_3=0\\ 2x_1-2x_3=0\end{array}\right\}$$

$$g)\ \left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0\\ y-z=5\\ x+z+2t=1\\ x+2y=0\end{array}\right\}\quad h)\ \left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3=2\\ x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+3x_2-x_3=-2\\ 3x_1+4x_2+3x_3=0\end{array}\right\}\quad i)\ \left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\ -x_1+x_2+9x_4=0\\ -x_1-3x_2+2x_3+3x_4=0\\ -x_1+2x_2-5x_3+2x_4=0\end{array}\right\}$$

Solución: a) $\left(\frac{67}{11},-\frac{28}{11},\frac{9}{11}\right)$; b) incompatible; c) $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\alpha,\alpha\right)|\alpha\in\mathbb{R}\right\}$; d) $(1,13,33)$; e) $(2,8,21)$; f) $(0,0,0)$; g) $(-8,4,-1,5)$; h) $(-1,0,1)$; i) $\{(59\alpha,-22\alpha,-17\alpha,9\alpha)\,|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

2) Discute los siguientes sistemas de ecuaciones en función de los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} ax+y+z=1\\ x+ay+z=a\\ x+y+az=a^2\end{array}\right\}\qquad b)\ \left.\begin{array}{r} 3x-y=ax\\ 5x+y+2z=ay\\ 4y+3z=az\end{array}\right\}$$

3) Discute el siguiente sistema de ecuaciones en función de los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-ay+bz=4\\ x+z=2\\ x+y+z=2\end{array}\right\}$$

4) Cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene dos términos independientes. Resuélvelos a la vez mediante el método de Gauss.

$$a)\ \left.\begin{array}{rr|r} 2x_1-4x_2 = & 10 & -8\\ x_1-3x_2+x_4= & -4 & -2\\ x_1-x_3+2x_4= & 4 & 9\\ 3x_1-4x_2+3x_3-x_4= & -11 & -15\end{array}\right\}\qquad b)\ \left.\begin{array}{rr|r} 2x_1-4x_2= & 10 & -8\\ x_1-3x_2= & -4 & -2\\ x_1-x_3= & 4 & 9\\ 4x_1-7x_2-x_3= & 10 & -15\end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{rr|r} 2x_1-4x_2= & 10 & -8\\ x_1-3x_2+x_4= & -4 & -2\\ x_1-x_3+2x_4= & 4 & 9\end{array}\right\}$$

Solución: a) $\left(\frac{97}{13},\frac{16}{13},-\frac{157}{13},-\frac{101}{13}\right)$ y $(0,2,-1,4)$; b) $(23,9,19)$ e incompatible;
c) $\{(23+2\alpha,9+\alpha,19+4\alpha,\alpha)\,|\alpha\in\mathbb{R}\}$ y $\{(-8+2\alpha,-2+\alpha,-17+4\alpha,\alpha)\,|\alpha\in\mathbb{R}\}$.

5) Aplica el método de Gauss para calcular, si existe, la inversa de las siguientes matrices.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$a)\ \begin{pmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \text{no existe.}$$

6) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz invertible. Demuestra las siguientes propiedades:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$ para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$, para cada $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq 1$.

7) Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$, decide si se cumplen las siguientes igualdades (da una demostración en caso afirmativo y busca un contraejemplo en caso contrario):

a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

8) Calcula A^2, A^3, A^4 para

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Generaliza el resultado calculando A^n para $n \in \mathbb{N}$. (*Sugerencia*: intenta inferir el posible valor de A^n y demuéstralo por inducción).

9) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la igualdad $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2.

10) Demuestra que la suma de matrices simétricas es simétrica. ¿Es el producto de matrices simétricas una matriz simétrica en general?

11) Una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se llama *idempotente* si $A^2 = A$. Demuestra lo siguiente:

a) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.

b) Si A es idempotente, entonces $I_n - A$ es idempotente (I_n es la matriz identidad de orden n).

c) Si A es idempotente, entonces $(I_n - A)A = A(I_n - A) = 0$.

d) Si A es idempotente e invertible entonces A es la matriz identidad.