

ÁLGEBRA. HOJA 4.

1) (i) Demostrar que si p es un primo tal que p divide al producto $a \cdot b$, entonces p divide a a o divide a b .

(ii) Sea $p \in \mathbb{Z}$ con $p \geq 2$. Suponer que p verifica la siguiente condición:

$$\text{Si } p|ab \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } p|a \text{ o } p|b.$$

Demuestra que p es primo.

2) Sean a, b, m números naturales con a y b primos entre sí. Demuestra que si $a|m$ y $b|m$ entonces $ab|m$. Encuentra un contraejemplo que muestre que si a y b no son primos entre sí el resultado no es cierto en general.

3) Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

4) Demuestra que todo número entero se puede expresar como la suma de un múltiplo de 1001 más un múltiplo de 30.

5) A una parada de autobús llegan tres líneas de autobuses: A, B y C. El autobús de la línea A tarda en hacer el recorrido completo 40 minutos; el de la línea B, una hora; y el de la línea C, 25 minutos. A las siete de la mañana han coincidido en la parada los tres autobuses. ¿A qué hora volverán a coincidir?

6) Dados m enteros consecutivos: $n, n + 1, n + 2, \dots, n + (m - 1)$, con $m > 1$, demuestra que uno y solamente uno es divisible por m .

7) Prueba que $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{Z}_n^* \Leftrightarrow \bar{a} \in \mathbb{Z}_n^*$ y $\bar{b} \in \mathbb{Z}_n^*$.

8) Halla \mathbb{Z}_7^* e indica cuál es el inverso multiplicativo de cada uno de sus elementos. Haz lo mismo con \mathbb{Z}_8^* .

9) Demuestra que si p es primo entonces p divide al número combinatorio $\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)! k!}$ para cada $1 \leq k \leq p-1$. ¿Es esto cierto si p no es primo?

10) Probar que si p es primo, en \mathbb{Z}_p se cumple que $\bar{a}^p + \bar{b}^p = (\bar{a} + \bar{b})^p$.

11) Hallar los inversos de $\bar{13}$ y de $-\bar{15}$ en \mathbb{Z}_{23} y en \mathbb{Z}_{31} .

12) Demuestra que la ecuación $\bar{13}x = \bar{2}$ tiene solución única en \mathbb{Z}_{23} , e indica cuál es. *Indicación:* aplica el problema anterior.

13) Demuestra que la ecuación $\bar{16}x = \bar{7}$ no tiene solución en \mathbb{Z}_{100} .

14) ¿Cuántas unidades tiene \mathbb{Z}_{9630} ? ¿Cuántas unidades tiene \mathbb{Z}_{101} ?

15) Calcula el resto de dividir 6^{234} entre 13. Calcula el resto de dividir 15^{2098} entre 14.