ÁLGEBRA. HOJA 3.

1) Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}$ con $d > 0$. Supogamos que $d|a$, que $d|b$, y que existen enteros s y t de modo que $d = sa + tb$. Demuestra que $d = \mathrm{mcd}(a, b)$.

2) Aplica el resultado anterior para probar que dados dos enteros a y b, el *último resto no nulo* que se obtiene al aplicar el algoritmo de Euclides es el máximo común divisor de a y b.

3) Demuestra que

$$\mathrm{mcd}\left(\frac{a}{\mathrm{mcd}(a,b)}, \frac{b}{\mathrm{mcd}(a,b)}\right) = 1.$$

4) Sea $S \subset \mathbb{Z}$ un subconjunto no vacío que cumple las propiedades:

$$s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 + s_2 \in S,$$
$$s \in S \Rightarrow -s \in S.$$

Demuestra que $S = \{0\}$ o bien $S = n\mathbb{Z} = \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ para algún entero positivo n.

5) Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ no simultáneamente cero, definimos $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como $f\big((n, m)\big) = an+bm$. Demuestra que $\mathrm{im}\, f = d\mathbb{Z}$ para $d = \mathrm{mcd}(a, b)$.

6) Sea q un número entero tal que $q \geq 1$. Calcular $\mathrm{mcd}(q, q^2)$, $\mathrm{mcd}(q, q + 1)$ y $\mathrm{mcd}(q, q + 2)$.

7) Sean a, b, d enteros positivos tales que $a = a_1 d$ y $b = b_1 d$ con $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$. Demuestra que si $\mathrm{mcd}(a_1, b_1) = 1$ entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = d$.

8) Sea $n = \pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ la descomposición de n en factores primos.

i) Demuestra que n tiene $(n_1 + 1)(n_2 + 1)\cdots(n_s + 1)$ divisores positivos.

ii) Indicar cuántos divisores enteros (positivos y negativos) tiene n.

9) Sabemos que dados dos enteros no nulos a y b, existen primos $p_1, \ldots, p_s$ de modo que

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \quad \text{y} \quad b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}$$

con $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$.

i) Expresar $\mathrm{mcd}(a, b)$ y $\mathrm{mcm}(a, b)$ en función de estas factorizaciones.

ii) Demuestra que $ab = \mathrm{mcd}(a, b) \cdot \mathrm{mcm}(a, b)$.

iii) Hallar el máximo común divisor de 363 y 55 usando el criterio en i).

iv) Hallar el máximo común divisor de 363 y 55 usando el algoritmo de Euclides.

10) Encontrar las parejas $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathrm{mcd}(a, b) = 10$ y $\mathrm{mcm}(a, b) = 100$.

11) Demuestra que la ecuación $6x+20y = 7$ no tiene soluciones enteras. ¿Qué puedes decir de $25x+45y = 3$?

12) Hallar el conjunto de soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

a) $111x + 36y = 15$,

b) $10x + 26y = 1224$,

c) $6x + 10y = 20$.