ÁLGEBRA. HOJA 2.

1) Considerar la relación sobre $\mathbb{Z}$ definida por: $m\mathcal{R}n \iff m+n$ es par. Demostrar que es una relación de equivalencia. Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

2) Sea $3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Considerar la relación sobre $\mathbb{Z}$ definida por: $m\mathcal{R}n \iff m-n \in 3\mathbb{Z}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

3) Fijado un entero positivo n, definimos $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Definimos $x\mathcal{R}y \iff x-y \in n\mathbb{Z}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. Describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

4) Considerar la relación sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por: $(m,n)\mathcal{R}(m',n') \Longleftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente?

5) Consideramos ahora la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por: $(m,n)\mathcal{R}(m',n') \Longleftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n$. ¿Es esta relación una relación de equivalencia?

6) Considerar la relación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $(m,n)\mathcal{R}(m',n') \Longleftrightarrow m+n' = m'+n$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes describir las clases de equivalencia? ¿Puedes identificar cada clase de equivalencia con los elementos de algún conjunto de forma que te ayude a describir el conjunto cociente?

7) Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Longleftrightarrow y = y'$. Probar que es una relación de equivalencia. ¿Puedes identificar cada clase de equivalencia con los elementos de algún conjunto de forma que te ayude a describir el conjunto cociente?

8) Dado el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, consideramos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\vec{u}\,\mathcal{R}\,\vec{v} \text{ si y solo si } \vec{u} - \vec{v} \in F.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relacíón de equivalencia. Obtener el conjunto cociente.

9) Consideramos el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x+y+z = 0\}$, consideramos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$\vec{u}\,\mathcal{R}\,\vec{v} \text{ si y solo si } \vec{u} - \vec{v} \in G.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relacíón de equivalencia. Obtener el conjunto cociente.

10) En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, consideramos la relac´ón $\mathcal{R}$ dada por:

$$\vec{u}\,\mathcal{R}\,\vec{v} \text{ si y solo si existe un } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relacíón de equivalencia. Obtener el conjunto cociente.

11) Sean A un conjunto y B un subconjunto de A. En $\mathcal{P}(A)$ se considera la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow X \cap B = Y \cap B$. Estudia si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describe el conjunto cociente.