Ejercicios en clase 1 - Soluciones

Serafín Ruiz Cabello

---

1 (5 puntos) Hallar un número complejo en forma binómica: $a + bi$ tal que $(a + bi)^2 = 1 + i$.

Debe obtenerse un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^2 = i + 1$. Basta con resolver dicha ecuación y dar una de sus raíces. Vamos a ver dos formas de hacerlo:

- Con coordenadas polares: En primer lugar hay que escribir $i + 1$ como $z = re^{i\alpha}$, donde r es el módulo y α es el ángulo. Concretamente,

  $$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \alpha = \arctan(1/1) = \frac{\pi}{4}.$$

  Por tanto, la ecuación se puede reescribir en polares como

  $$z^2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

  Como se trata de una raíz cuadrada, existen dos soluciones distintas, que llamaremos z_1 y z_2. Ambas tienen el mismo módulo, que es la raíz cuadrada positiva de r; es decir $\sqrt{\sqrt{2}} = 2^{1/4}$. En cuanto a los ángulos, la primera de ellas tiene $\alpha/2 = \pi/8$; y la segunda, $\alpha/2 + \pi = 9\pi/8$. Por tanto,

  $$z_1 = 2^{1/4}e^{i\pi/8}, \qquad z_2 = 2^{1/4}e^{i9\pi/8}.$$

  Cualquiera de ellas es una solución válida, pero el enunciado nos pide presentarla en forma binómica. Para ello, basta recordar que

  $$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \qquad \text{para cualquier } x \text{ real.}$$

  Por tanto, **las dos posibles soluciones del problema son:**

  $$\begin{array}{rcl} z_1 &=& 2^{1/4}\cos(\pi/8) \quad + \quad i\,2^{1/4}\operatorname{sen}(\pi/8) \\ z_2 &=& 2^{1/4}\cos(9\pi/8) \quad + \quad i\,2^{1/4}\operatorname{sen}(9\pi/8). \end{array}$$

- Con coordenadas rectangulares: En este caso la resolución es ligeramente más complicada, aunque las soluciones se obtienen directamente en forma binómica. Elevando el cuadrado la expresión de la izquierda de la igualdad en el enunciado, se obtiene:

  $$a^2 + 2abi - b^2 = 1 + i.$$

  Ahora igualamos las partes reales e imaginarias, y se obtiene un sistema de dos ecuaciones:

  $$\left.\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& 1 \\ 2ab &=& 1 \end{array}\right\}.$$

Como $a = 0$ no es solución, podemos dividir la segunda ecuación por $2a$ y se obtiene $b = 1/(2a)$. Sustituyendo el valor de b en la primera ecuación, queda

$$a^2 - \frac{1}{4a^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 4a^4 - 1 = 4a^2.$$

Mediante el cambio $x = a^2$, esta ecuación queda reducida a una de segundo grado, $4x^2 - 4x - 1 = 0$. Sus soluciones son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{8} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Como $a = \pm\sqrt{x}$, sólo nos podemos quedar con la solución positiva de x. Por tanto, a tiene dos soluciones, que son

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}, \qquad a_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Ahora podemos despejar $b_1 = 1/(2a_1)$ y $b_2 = 1/(2a_2)$. Por tanto, **las dos posibles soluciones son**

$$z_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{i}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}}, \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{i}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}}.$$

Con la ayuda de una calculadora puede comprobarse que las soluciones obtenidas mediante ambos métodos coinciden. De hecho,

$$z_1 \approx 1'0987 + i \cdot 0'4551, \qquad z_2 \approx -1'0987 - i \cdot 0'4551.$$

---

2 (5 puntos) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos (con la adición y multiplicación por escalares definidas de manera natural) son espacios vectoriales? Justifica tu respuesta.

a) El conjunto de todas las funciones no-negativas en el intervalo $[0, 1]$.

b) El conjunto de todos polinomios de grado *exactamente* n.

a. Este conjunto de funciones, al que llamaremos A, no es un espacio vectorial. La razón es que al multiplicar cualquiera de estas funciones (no nula) por un escalar negativo, se obtiene una función que no pertenece al conjunto. Esto, sin ser una de las ocho propiedades necesarias, ya provoca que A no pueda ser espacio vectorial, pues la multiplicación por escalares no está bien definida. De las ocho propiedades que debe cumplir un espacio vectorial, la única que A no cumple es la propiedad del inverso aditivo. Según esta propiedad, para cada función $f \in A$, debería existir otra función $g \in A$ tal que $f + g \equiv 0$; o equivalentemente, $f(x) + g(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. Pero la única función posible como candidata a g es $-f$. Y toda función f de A que no sea la función 0 toma valores positivos en algún punto del intervalo $[0, 1]$, por lo que $-f$ no está en A. Por tanto, **este conjunto de funciones no es un espacio vectorial**. Puede comprobarse que las otras siete propiedades sí se cumplen, a partir de las propiedades básicas de funciones.

b. Llamemos B a este segundo conjunto. Tampoco va a ser un espacio vectorial, y en este caso hay varias razones. Pero la principal es que B no es cerrado para la suma de polinomios. Si consideramos por ejemplo, los polinomios $x^n + x - 3$ y $-x^n + 2$, su suma ya no es un polinomio de grado n, sino uno de grado menor. Esto ya causa que B no pueda ser espacio vectorial, pues la suma no está bien definida para todos sus elementos. A partir de esto, que de nuevo no es una de las ocho propiedades pero es necesario para que la definición sea correcta, puede demostrarse fácilmente que B no cumple ciertas propiedades de espacio vectorial:

- No existe elemento neutro para la suma. El único candidato es el polinomio 0, que obviamente no tiene grado n para cualquier $n \geq 1$, y por tanto no estÃ¡ en B.
- No existe elemento neutro para el producto. De nuevo, el candidato natural es el polinomio constante 1, que tampoco tiene el grado adecuado si $n \geq 1$.

Cualquiera de estar tres razones justifica que B **no es un espacio vectorial**. Es interesante notar que si se considera en su lugar el conjunto de todos los polinomios de grado *como mucho* n, entonces sí que se tiene un espacio vectorial.

---

3 (5 puntos) Explica por qué lo siguiente *no* es un producto escalar en el espacio vectorial especificado:

a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$ **en** $\mathbb{R}^2$

b) $\langle A, B \rangle = Traza(A + B)$ **en el espacio de matrices reales** 2×2**.**

Recuerda: La traza de una matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ **es** $Traza(A) := \alpha + \delta$**.**

a. La función $\langle\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **no es un producto escalar** porque no cumple la última propiedad de estos (es fácil comprobar que cumple todas las demás). Para $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, se tiene que

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2,$$

y dicha cantidad no será siempre positiva para cualquier vector (x_1, x_2) no nulo de $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, $\langle (1,1), (1,1) \rangle = 1^2 - 1^2 = 0$, o $\langle (0,1), (0,1) \rangle = 0 - 1^2 = -1$.

b. Algo muy similar ocurre con la siguiente función, $\langle\rangle : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Para $A = B$, se tiene

$$\langle A, A \rangle = \text{Traza}(2A) = 2\alpha + 2\delta,$$

y esta cantidad puede ser negativa o cero para muchas matrices $2x2$. Por ejemplo,

$$\text{Traza} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0, \qquad \text{Traza} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 4 = -2.$$

Por tanto, esta función **no es un producto escalar.**