

ÁLGEBRA I. HOJA 8

1) Calcular los determinantes siguientes:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sol: 12, -4, -1, -8.

2) Calcular los determinantes de las matrices dadas a continuación:

$$a) \left| \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \right| \quad b) \left| \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix} \right|$$

Sol: a) -1, b) 1.

3) Demostrar que los siguientes determinantes son nulos:

$$a) \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

4) a) Comprobar que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) , (c_1, c_2, c_3) del espacio es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

y hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos $(1, 2, 1)$, $(-1, 3, 0)$, $(2, 1, 3)$.

b) Escribir la ecuación de una recta del plano que pasa por los puntos (a, b) , (c, d) del plano y hallar la ecuación cartesiana de la recta del plano que pasa por los puntos $(-1, -2)$, $(2, 2)$.

5) a) Siendo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P(x)$ un polinomio de grado 3, hallar sus coeficientes para que $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(2) = -1$, $P(3) = 0$.

Sol: $2 + \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$.

b) Demostrar que siempre se puede encontrar un polinomio de grado 3 que cumpla las condiciones $\{P(x_i) = y_i\}_{i=1}^4$ siempre que todos los $x_1, \dots, x_4$ sean distintos.

c) Generalizar el resultado b): dados $n+1$ pares de puntos $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n+1}$ con $x_1, \dots, x_{n+1}$ distintos, hay un único polinomio $P(x)$ de grado n que cumple $P(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n+1$.

Obsérvese que la parte c) nos indica cómo hallar una función polinómica de grado n que pase por $n+1$ puntos del plano siempre y cuando no haya dos puntos en la misma vertical.

6) a) Obtener, en términos de los determinantes de los menores diagonales de la matriz A ,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

(Indicación: descomponer las filas en sumandos con y sin λ).

b) Aplicar la fórmula obtenida para hallar los siguientes determinantes:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}, \quad \left| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I \right|$$

sol: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 7\lambda + 2$, $-\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + 1$

7) Encontrar los valores de a para que las siguientes matrices sean invertibles:

$$a) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

Sol: a) $a \neq 1$, $a \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $a \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ b) $a \neq 2$ y $a \neq -2$ c) $a \neq -1$ y $a \neq \frac{1}{2}$.

8) Sean matrices cuadradas $A \in M_{m \times m}$, $B \in M_{n \times n}$, $C \in M_{m \times n}$ y $D \in M_{(m+n) \times (m+n)}$ una matriz que se descompone por bloques como

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que $|D| = |A||B|$ utilizando la descomposición

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

b) Demostrar, utilizando una descomposición similar, la misma igualdad $|D| = |A||B|$, en el caso

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

(Nótese que ahora $C \in M_{n \times m}$).

c) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 7 & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & 4 & -2 & & & \\ & & & 1 & 4 & 5 & & \\ & & & & & & 2 & 3 \\ & & & & & & & 2 \end{vmatrix}$$

Sol: -240.

9) Estudiar si son independientes en su espacio vectorial correspondiente los siguientes conjuntos. En el caso en que sean linealmente dependientes, expresar uno de ellos como combinación lineal de los restantes:

a) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

b) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$,

c) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

d) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$,

e) $\{(i, 1-i), (2, -2i-2)\} \subset \mathbb{C}^2$,

f) $\{(i, 1, -i), (1, i, -1)\} \subset \mathbb{C}^3$.

g)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

h) Los polinomios $\{1, x - 2, (x - 2)^2, (x - 2)^3\} \subset P_{\mathbb{R}}^3[x]$.

10) a) Demostrar que si $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$ son funciones tales que existen $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ verificando

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_k(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_k(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_k) & f_2(a_k) & \cdots & f_k(a_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

son funciones linealmente independientes.

Demuestra los siguientes enunciados utilizando el apartado anterior:

b) Los polinomios $\{1, x - 2, (x - 2)^2, \dots, (x - 2)^n\} \subset P_{\mathbb{R}}^n[x]$ son linealmente independientes.

c) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, los polinomios $\{1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^n\} \subset P_{\mathbb{R}}^n[x]$ son linealmente independientes para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

11) Estudiar si los siguientes conjuntos son bases de los espacios vectoriales dados:

a) $\{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$

b) $\{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

12) Encontrar bases de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$:

a) Las matrices diagonales.

b) Las matrices triangulares superiores.

c) Las matrices triangulares inferiores.

d) Las matrices simétricas.

e) Las matrices antisimétricas.

13) a) Siendo $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, demostrar que los vectores:

$$u_1 = e_1, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad \dots, \quad u_{n-1} = e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1}, \quad u_n = e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1} + e_n$$

son otra base de $\mathbb{R}^n$.

b) Hallar las coordenadas de los vectores $(n, n - 1, \dots, 2, 1)$ y $(1, 2, \dots, n - 1, n)$ de $\mathbb{R}^n$, en la base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

14) Hallar las coordenadas del vector $(3, 2, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$ en la base

$$B = \{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}.$$