ÁLGEBRA I. HOJA 6

Problemas LADW: p.46 2.1-2.2; p.51 3.1-3.9; pp.55-56, 5.1-5.6; pp 58-59 6.1-6.2; pp. 66-68 7.1-7.14; pp. 71-72 8.1-8.6.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} x+2y-z &=& 7\\ 2x+y+z &=& 6\\ x-y+3z &=& -1\end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y-5z-2 &=& 0\\ 3x-y+2z+1 &=& 0\\ 5x+4y-6z-3 &=& 0\end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+4z+8t &=& -1\\ x+3y-6z+2t &=& 3\\ 3x-2y+2z-2t &=& 8\\ 2x-y+2z &=& 4\end{array}\right.$$

Se pueden comprobar los resultados obtenidos por substitución o aplicando el método de Gauss.

Sol: a)(5/3,8/3,0), b)(-1/5,14/5,6/5), c)(2,-3,-3/2,1/2).

2. Estudiar la compatibilidad y carácter determinado/indeterminado de los sistemas siguientes aplicando el teorema de Rouché-Frobenius según el cálculo del rango de las matrices correspondientes a los sistemas siguientes:

$$a)\left\{\begin{array}{rcr} x_1+2x_2-x_3 &=& 1\\ x_2+x_3 &=& 2\\ x_1+3x_2 \quad &=& 3\end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1+x_2 &=& 5\\ x_1-x_2 &=& 1\\ x_1+2x_2 &=& 0\end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rcr} x_1-3x_2+x_3 &=& 2\\ 3x_1-8x_2+2x_3 &=& 2\\ 2x_1-5x_2+x_3 &=& 3\end{array}\right.$$

Sol: a) S.C.I b) S. I. c) S.I.

3. Hallar los valores de a y b que hagan compatibles los sistemas

$$a)\left\{\begin{array}{rcl} bx-ay-az &=& a\\ -bx\qquad -az &=& a\\ -bx-by-bz &=& b\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{lcl} bx-ay-az-at &=& a\\ -bx\qquad -az-at &=& a\\ -bx-by\qquad -at &=& a\\ -bx-by-bz &=& a\\ -bx-by-bz-bt &=& b\end{array}\right.$$

sol: a) Para cualesquiera valores de a y b, b) Si $a=0$.

4. Hallar los valores de a para que los siguientes sistemas sean compatibles indeterminados.

$$a)\ \left.\begin{array}{r} ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{r} (a+1)x+y+2z=-2\\ 2x+y+(a+1)z=3\\ x+(a+1)y+2z=-2\end{array}\right\} \quad c)\ \left.\begin{array}{r} -x+ay+az=0\\ ax-y+az=0\\ ax+ay-z=0\end{array}\right\}$$

sol: a) $a=-2$ ó $a=1$ b) $a=-4$ ó $a=0$ c) $a=-1$ ó $a=\frac{1}{2}$

5. Encontrar bases de los siguientes subespacios:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_3+2x_4=0\\ x_1-x_3=0\end{array}\right\}\subset\mathbb{R}^4$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5 \qquad \left.\begin{array}{rrrrr} 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & +3x_5 = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & +3x_5 = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^5$$

6. Encontrar una base del subespacio $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rrrr} 2a & +b & -c & +d = 0 \\ a & +b & +c & -d = 0 \end{array} \right\}$$

7. Encontrar una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres divisibles por $x - 1$.

8. Comprobar que el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,0,1,-1),(1,-1,1,-1)\}$ coincide con el espacio de soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x_1 & +x_3 & +2x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_3 & & = 0 \end{array}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

9. Comprobar que los subespacios S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^5$ cuyas ecuaciones son los sistemas:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 = 0 \end{array}\right\} \equiv S_1 \qquad \left.\begin{array}{rrrrr} 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & +3x_5 = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & +3x_5 = 0 \end{array}\right\} \equiv S_2$$

son iguales.

10. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathrm{Span}\{(1,0,1,0),(2,1,0,-1)(1,-1,3,1)\}, \\ S_2 &= \mathrm{Span}\{(3,1,0,-1),(1,1,-1,-1),(7,1,2,-1)\}, \\ S_3 &= \mathrm{Span}\{(0,2,5,0)\}. \end{aligned}$$

11. Hallar las ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathrm{Span}\{(1,0,1,0,1)(0,1,1,0,1)(1,1,3,1,1),(0,0,1,1,1)(0,-1,1,2,1)\}, \\ S_2 &= \mathrm{Span}\{(1,0,1,0,0)(2,1,0,-1,1)(2,0,1,0,0),(3,1,0,-1,1)\} \end{aligned}$$

12. Siendo $S_1 = \mathrm{Span}\{(1,-5,2,0)(1,-1,0,2)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(3,-5,2,1)(2,0,0,1)\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \cap S_2$.

13. Siendo $S_1 = \mathcal{L}\{(1,0,1,0)(2,1,0,-1)\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\{(3,1,0,-1)(1,1,-1,-1)\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y de $S_1 \cap S_2$.

14. Sean

$$S_1 = \mathrm{Span}\{(1,0,1,0,1)(2,1,0,-1,0)(2,0,1,0,1)\} \quad y \quad S_2 = \mathrm{Span}\{(3,1,0,-1,0)(1,1,-1,-1,-1)\}.$$

Comprobar que $S_1 + S_2 = S_1$ y $S_1 \cap S_2 = S_2$.

15. Siendo $S_1 = \text{Span}\{(1,1,2,0)(-2,0,1,3)\}$ y $S_2 = \text{Span}\{(0,2,5,0)(-1,1,3,2)\}$, hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.

16. Siendo $S_1 = \text{Span}\{(0,1,1,0)(1,0,0,1)\}$ y

$$S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array} \right.$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.

17. Siendo

$$S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & & -x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad y \qquad S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \end{array} \right.$$

hallar una base y las ecuaciones cartesianas de $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$.

18. Siendo F_1 el plano de ecuación $x + 2y - z = 0$ y F_2 la recta de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & -y & +2z & = 0 \\ -2x & +2y & +z & = 0 \end{array} \right.$$

averiguar si son complementarios.

19. Siendo $V_1 = \text{Span}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ y $V_2 = \text{Span}\{(0,1,1)\}$, averiguar si son complementarios.

20. Comprobar que son complementarios los subespacios definidos por las ecuaciones:

$$S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lllll} -2x_1 & -5x_2 & +4x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & +7x_2 & & +4x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \right.$$

21. Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de un espacio complementario de

a) $S_1 = \text{Span}\{(0,2,5,0),(-1,1,3,2)\}$.

b) $S_2 = \text{Span}\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)\}$.

22. Hallar una base de $S_1 \cap S_2$ donde

$$S_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad S_2 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

¿Cúal es $S_1 + S_2$?

23. Hallar una base de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$, donde

$$S_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad S_2 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hallar también las ecuaciones cartesianas de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$.

24. En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios que conmutan con cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar una base de cada uno de ellos, de su suma y de su intersección.

b) Hallar una base de un espacio complementario del subespacio de las matrices que conmutan con A.

25. Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dados los subespacios vectoriales $S_1 = \{A | AM = A\}$ y $S_2 = \{B | MB = B\}$. Encontrar dimensiones y bases de $S_1 \cap S_2$ y de $S_1 + S_2$.

26. Hallar los subespacios suma e intersección de los siguientes subespacios de las matrices cuadradas de orden n:

a) El subespacio de las matrices triangulares superiores de orden n y el subespacio de las matrices triangulares inferiores.

b) El subespacio de las matrices simétricas de orden n y el subespacio de las matrices antisimétricas de orden n.

27. Consideramos los subespacios del espacio de polinomios de grado ≤ 3 S_1, formado por los polinomios múltiplos de $x+1$, y S_2, formado por los polinomios múltiplos de $x-1$. Hallar los subespacios suma e intersección de S_1 y S_2.

28. En $\mathbb{R}^4$ sean $U = \mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$ y $V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ donde

$$u_1 = (1, 1, 2, -\lambda), \quad u_2 = (-1, 1, 0, -\lambda), \quad v_1 = (1, \lambda, 2, -\lambda), \quad v_2 = (2, 3, \lambda, 1).$$

Hallar según los valores de λ las dimensiones de U , V, $U + V$ y $U \cap V$.