

ÁLGEBRA I. HOJA 2

Nota: Las hojas están colgadas también en la página web de del curso

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/mzambon/WS12.html

1. Probar que el triángulo formado por los puntos $(-3, 5, 6)$, $(-2, 7, 9)$ y $(2, 1, 7)$ es un triángulo rectángulo. Hallar los otros ángulos.

2. Probar que los puntos $(2, 1, 4)$, $(1, -1, 2)$, $(3, 3, 6)$ están en la misma recta.

Resolver los Ejercicios del libro (LADW) en las páginas 5 (del 1.1 al 1.6) y 11 (del 2.1 al 2.6).

3. ¿Cuales de las siguientes familias de vectores forman un sistema de generadores de \mathbb{R}^3 ?

1. $\{(1, 2, 3), (1, 2, 5)\}$

2. $\{(1, 2, 3), (1, 2, 5), (0, 0, -4)\}$

3. $\{(1, 2, 3), (1, 2, 5), (0, 0, -4), (1, 1, 1)\}$

4. ¿Cuales de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior son linealmente independientes?

5. ¿Cuales de las 3 familias de vectores que aparecen en el ejercicio anterior forman una base de \mathbb{R}^3 ?

6. Dado el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^2 , determinar si la familia de vectores $\{(1, 1+2i), (i, -2+i)\}$ es una base de \mathbb{C}^2 .

7. Sea L la recta que pasa por $(-2, 1, 3)$ y $(1, 2, 4)$. Hallar el punto de L más próximo al origen, y la distancia mínima.

Respuestas: $(-16/11, 13/11, 35/11), \sqrt{150/11}$.

8. Hallar el área del triángulo con vertices $(3, 0, 2)$, $(6, 1, 4)$, $(2, 1, 0)$.

9. Comprobar que $((a, b), (c, d))_1 := ac - 2ad - 2bc + 5bd$ define un producto escalar en el plano real.

10. Calcular las normas de los vectores $u = (1, 2)$ y $v = (4, 5)$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot, \cdot)_h$ y con respecto al producto $((a, b), (c, d))_1 = ac - 2ad - 2bc + 5bd$. Calcular también $(u, v)_h$ y $(u, v)_1$.

11. Sea $M_{m,n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $m \times n$ sobre \mathbb{R} , sea $B^t = B^T$ la matriz traspuesta de B , y sea $tr(A)$ la traza de la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, definida mediante $tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Probar que la traza define un producto escalar en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ mediante $(A, B) := tr(B^T A)$.

12. Probar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, con producto escalar $(A, B) = tr(B^T A)$.

13. Sea $P(\mathbb{R})$ el espacio de polinomios sobre \mathbb{R} . Probar que $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ define un producto escalar en $P(\mathbb{R})$.

14. Hallar el ángulo entre los vectores e_1 y $(1, 1, 1)$ en \mathbb{R}^3 .

15. Sean $u = (z_1, z_2)$ y $v = (w_1, w_2)$ vectores en \mathbb{C}^2 . Comprobar que $(u, v)_1 := z_1\overline{w_1} + (1 + i)z_1\overline{w_2} + (1 - i)z_2\overline{w_1} + 3z_2\overline{w_2}$ define un producto escalar en \mathbb{C}^2 .

16. Calcular las normas de los vectores $u = (1 - i, 2 + 3i)$ y $v = (4 + 2i, 5 + i)$ con respecto al producto escalar habitual $(\cdot, \cdot)_h$ y con respecto al producto $(u, v)_1 := z_1\overline{w_1} + (1 + i)z_1\overline{w_2} + (1 - i)z_2\overline{w_1} + 3z_2\overline{w_2}$. Calcular también $(u, v)_h$ y $(u, v)_1$.

17. Decidir razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

$$\left(\int_{99\pi/200}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x dx \right)^2 \leq \int_{99\pi/200}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^2 dx \int_{99\pi/200}^{\pi/2} (\cos x)^2 dx.$$