ÁLGEBRA I. HOJA 1

1. Resolver utilizando la regla de Ruffini las ecuaciones:

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Representar gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones, y hallar todas las soluciones. Hallar el ángulo entre cada par de rectas (esta pregunta es un poco ambigua).

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ x - y = -2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{array}\right\}.$$

3. Hallar las ecuaciones, en forma paramétrica, de la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 3)$ y $(-1, 0, 3)$ en $\mathbb{R}^3$.

   Respuesta parcial: $x = 2 - 3t$.

4. Sea $B_1 = \{e_1, e_2\}$ la base canónica del plano real $\mathbb{R}^2$, y sea $B_2 = \{v_1, v_2\}$ la base compuesta por los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (1, 2)$. Hallar las coordenadas de e_1 y e_2 con respecto a B_2.

5. Resolver $z^3 = i$ en coordenadas polares y rectangulares. (Recordatorio: las coordenadas rectangulares, o cartesianas, son de la forma $a + ib$; las polares, $re^{i\alpha}$).

   Solución (parcial): $\sqrt{3}/2 + i/2, -\sqrt{3}/2 + i/2, -i$.

6. Resolver $iz + (2 - 10i)z = 3z + 2i$.

   Solución: $-9/41 - i/41$.

7. Resolver $z^2 = -8 - 6i$.

8. Resolver $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.

   Solución: $2 - i, 1 + 2i$.

9. Resolver el sistema $(i + 1)z + (2 - i)w = -3i, (2i + 1)z + (3 + i)w = 2 + 2i$.

   Solución: $z = -1 + 5i, w = 19/5 - 8i/5$.

10. Escribir $\sum_{n=0}^{99}(i + 1)^n$ en coordenadas rectangulares y polares. Solución: $(1 + 2^{50})i$.

11. Escribir en coordenadas polares $4 + i, -3/2 - i/2, -1 + 2i$.

12. Comprobar que $(1 + i)^{12} = -64$, y $((1 - i)/\sqrt{2})^{-6} = -i$.

13. Resolver las siguientes ecuaciones i) $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$; ii) $z^4 = i$; iii) $z^3 = -8i$.

    Soluciones a iii): $z = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$.

14. Recordad que las rotaciones en el espacio tridimensional no conmutan en general. Decidir razonadamente si las rotaciones en el plano conmutan.

15. Usando $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, donde x es un número real, demostrar que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ y $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$.

16. Sea $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ la norma euclídea (la longitud) del vector $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Comprobar que para todo par de vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, la norma del producto vectorial $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|_2$ nos da el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

17. Hallar los siguientes números complejos en forma binómica $a + bi$:

$$(1+2i)(1-2i),\ \frac{1+2i}{1-2i}, \qquad \left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^2, \qquad \frac{(1+2i)^3}{(2-i)^3},\ \frac{(1+2i)^3}{(2-2i)^3}.$$

18. Hallar un número complejo en forma binómica: $a + bi$ tal que $(a + bi)^2 = 1 + i$.

19. Resolver la ecuación $x^4 - 2x^2 + 10 = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

20. Resolver la ecuación $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ en el cuerpo de los números complejos.

21. Demostrar

    a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

    b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

22. Demostrar que para todo polinomio $p(z)$ con coeficientes reales, $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

23. Demostrar:

    a) $|\overline{z}| = |z|$.

    b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ usando coordenadas rectangulares.

    c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

24. De los números complejos enunciados a continuación calcular su módulo y su argumento y escribirlos en forma trigonométrica y en forma polar.

$$1+i,\ 1-i, \qquad -1-i, \qquad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

25. Demostrar utilizando la forma binómica y la forma polar de los números complejos que:

    a) El producto de un número por su conjugado es un número real.

    b) El cociente de un número por su conjugado es de módulo 1. Observar que la demostración usando la forma polar es más corta.

    c) Comprobar los resultados anteriores en los cálculos siguientes:

$$(1+2i)(1-2i), \qquad \frac{3+4i}{3-4i},$$

    d) Utilizar los resultados anteriores para calcular:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right), \qquad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

26. Probar la asociatividad de la multiplicación de números complejos usando su expresión en forma polar y comparar la simplicidad del cálculo respecto del que hay que hacer para demostrarla en forma binómica.

27. Calcular en forma polar y en forma binómica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{-4}, \qquad \sqrt{i}, \qquad \sqrt{-i}.$$

Comprobar que los resultados son los mismos.

28. Calcular en forma binómica y en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

$$\sqrt{1+i}, \qquad \sqrt{-2+2i}.$$

Comparando las expresiones determinar el valor de $\cos(\pi/8)$ y $\cos(3\pi/8)$.

Comprobar que $\cos^2(\pi/8) + \cos^2(3\pi/8) = 1$. ¿Por qué?

29. Expresar las siguientes raíces en forma binómica utilizando la forma trigonométrica correspondiente y el ejercicio anterior.

$$\sqrt[4]{-16}, \qquad \sqrt[3]{-8}, \qquad \sqrt[3]{-27i}, \qquad \sqrt[4]{16i}.$$

30. Hallar las raíces cuartas de $-i$ y representarlas gráficamente.

31. Hallar las raíces quintas de la unidad. Señalar cuáles son las raíces que son conjugadas entre sí.

32. Hallar las siguientes raices:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt[6]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

¿Cómo están relacionadas entre sí?

33. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$$x^6 + 1 = 0, \qquad\qquad x^6 + 2x^3 + 1 = 0.$$

34. Habiendo comprobado que $(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1)(x-1) = x^n - 1$, demostrar que

   a) Las soluciones complejas y las soluciones reales de $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ son raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad.

   b) La ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real.

   c) La ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ no tiene ninguna solución real si n es par y tiene exactamente una solución real si n es impar. ¿Cuál es la solución real si n es impar?

   d) Las raíces $(n+1)$-ésimas de la unidad que no coinciden con 1, son soluciones de la ecuación $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$.

35. Resolver en el cuerpo de los números complejos las ecuaciones:

$$x^6 + x^5 - x - 1 = 0, \qquad x^7 + x^6 - x - 1 = 0,$$

$$2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0, \qquad 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

36. Deducir de la fórmula de De Moivre $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$

    a) Las fórmulas del coseno del ángulo triple y del seno del ángulo triple.

    b) Las fórmulas análogas para el ángulo quíntuple.

37. Hallar $\cos(\pi/12)$ calculando la raíz de $e^{i\pi/6}$.