Álgebra I, curso 2012-13 30/11/2012

Ejercicios en clase 2 - Soluciones
Serafín Ruiz Cabello

Nota: Las soluciones de los ejercicios están redactadas de forma exhaustiva, incluyendo diferentes formas de abordar cada problema y diferentes soluciones, así como razonamientos teóricos adicionales y aclaraciones sobre errores frecuentes a la hora de resolverlos. En ningún caso pretender reflejar el nivel exigido en la asignatura.

1 (5 puntos) a) Considera la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ dada por reflexión con respecto a la recta $x_1 = x_2$. Encuentra la matriz correspondiente.

b) Encuentra la matriz correspondiente a la aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-5y \\ 7y \end{pmatrix}.$$

a. Para realizar este apartado debemos

- Dar una descripción explícita de esta aplicación; es decir, escribir la ecuación que la representa.
- Escribir la matriz correspondiente a dicha aplicación.

La parte más complicada es la primera, puesto que la matriz correspondiente es muy sencilla. En primer lugar vamos a resolver el ejercicio dando por sabida la fórmula de esta reflexión, y luego probaremos como se obtiene. Si llamamos $R(a,b)$ al punto reflejado por (a,b) respecto de la recta $x=y$, entonces se tiene que $R(a,b)=(b,a)$. Matricialmente, esto se expresa como

$$R\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Y por tanto, la matriz que expresa la reflexión no es más que

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Conviene observar que R es efectivamente una aplicación lineal, simplemente por construcción.

¿Cómo se obtiene la fórmula para R si no se conoce previamente? Hay varias formas de obtenerla. La más sencilla en este caso concreto es que, como $R(1,0)=(0,1)$ y $R(0,1)=(1,0)$. Por tanto,

$$R \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y de aquí se obtiene la matriz para R. Otra forma de verlo, más complicada pero útil en otros casos (como en reflexiones en tres dimensiones) es ver cómo actúa esta reflexión sobre un punto cualquiera del plano, (a,b). Coloquialmente, la reflexión envía dicho punto a otro punto que está *al otro lado* de la recta, a la misma distancia y *en la misma posición*. De forma más exacta, la reflexión del punto (a,b) a través de la recta $x=y$ es el único punto $R(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$ que

- Está a la misma distancia de la recta que (a,b).
- El vector que lo une con (a,b) es perpendicular a la recta $x=y$.
- No es el punto (a,b).

Por supuesto, si (a,b) está encima de la recta, su reflejado es él mismo, y la definición no es válida. Para calcular $R(a,b)$ de forma explícita, empezamos por construir el vector $\mathbf{v}$ perpendicular a la recta y tal que $(a,b)+\mathbf{v}$ esté encima de la recta. Como el vector director del plano es $(1,1)$, el vector $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ tendrá que verificar $(1,1)\cdot(v_1,v_2)=0$, de donde $\mathbf{v}=(-\lambda,\lambda)$, para cualquier λ real. Como $(a,b)+(-\lambda,\lambda)$ tiene que estar encima de la recta, $a-\lambda=b+\lambda$, de donde $\lambda=(a-b)/2$. Ahora basta duplicar el vector para obtener por fin el reflejado de (a,b):

$$R(a,b)=(a,b)+2\mathbf{v}=(a,b)+2\Big(-\frac{a-b}{2},\frac{a-b}{2}\Big)=(b,a).$$

Obsérvese que, si (a,b) está encima de la recta, esta fórmula es consistente, ya que $R(a,a)=(a,a)$. No se exige justificar esta construcción si se conoce de antemano que esta reflexión consiste en intercambiar las coordenadas. También puede obtenerse de forma gráfica.

Para calcular reflexiones en torno a otras rectas del plano, es mejor llevar la recta a uno de los ejes por un giro, aplicar la reflexión y luego deshacer de nuevo el giro. Por ejemplo, para calcular la reflexión alrededor de la recta que pasa por el origen (si no, no es lineal) y forma un ángulo α con el eje x, la fórmula es

$$\begin{aligned}
R_\alpha(a,b) &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha & 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\ 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha)\\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En el último paso se utilizan las igualdades para el ángulo doble. No se trata de un giro porque el determinante no es 1, sino -1. Esta fórmula es válida para todas las reflexiones. Puede comprobarse que, para $\alpha=\pi/4$, coincide con la matriz solución de este apartado.

b. En general, la matriz correspondiente a una aplcación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensiones m y n tendrá m columnas (tantas como el espacio de partida) y n filas (tantas como el espacio de llegada). En este caso, para que la multiplicación matricial sea correcta, T será una matriz 3×2:

$$T=\begin{pmatrix}\circ & \circ\\ \circ & \circ\\ \circ & \circ\end{pmatrix},\qquad \text{tal que}\quad \begin{pmatrix}\circ & \circ\\ \circ & \circ\\ \circ & \circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\ 2x-5y\\ 7y\end{pmatrix}$$

Basta rellenarla con los coeficientes de la matriz final, en el orden adecuado:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

---

2 (5 puntos) Averiguar si son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (las matrices reales 2 por 2) los siguientes subconjuntos:

a) Las matrices de números reales de orden 2×2 de rango 1.

b) Las matrices de números reales de orden 2×2 que conmutan con la matriz B, siendo B una matriz fija 2×2.

En general, un subconjunto S de un espacio vectorial V con un cuerpo de escalares k será un subespacio vectorial de V si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- La suma de dos elementos de S también pertenece a S.
- El producto de cualquier escalar de k por cualquier elemento de S pertenece a S.

El enunciado no dice explícitamente que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sea un espacio vectorial, pero sabemos por teoría que lo es, siendo $\mathbb{R}$ sus escalares. Es importante tener esto claro antes de comenzar, ya que

- Si $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ no fuese un espacio vectorial, los dos subconjuntos dados no serían subespacios aunque cumpliesen las dos propiedades antes nombradas.
- Según cuál sea el cuerpo de escalares, la segunda propiedad puede cumplirse o no.

Para probar cada apartado, pues, basta demostrar las dos propiedades, si el subconjunto correspondiente es un subespacio vectorial; o dar un contraejemplo, si no lo es.

a. Sea S el subconjunto de matrices de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. No es un subespacio vectorial, ya que no cumple ninguna de las dos propiedades, y es bastante sencillo encontrar ejemplos en ambos casos.

- La suma de dos matrices de S puede tener cualquier rango entre cero y dos, y por tanto no tiene por qué permanecer en S:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- El producto por escalar mantiene el rango salvo en caso de que el escalar sea cero. Por tanto, multiplicar por cero una matriz de S da como resultado una matriz que no está en S.

Cualquiera de los contraejemplos expuestos prueba que S **no es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.**

b. Fijemos una matriz cualquiera B, perteneciente a $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Sea $T(B)$ el subconjunto de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices A tales que $AB = BA$. Es decir,

$$T(B) := \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : AB = BA\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Esta notación, que en principio puede resultar confusa, se toma para reflejar el punto clave de este apartado: hay que probar que $T(B)$ es un subespacio vectorial para *todas* las posibles matrices B. Si hubiera una sola que no lo cumpliera, entonces la respuesta sería negativa. Pero, de hecho, $T(B)$ sí es un subespacio vectorial, sea cual sea la matriz B escogida. Un error bastante frecuente es pensar que hay que distinguir casos según B sea la matriz nula, invertible o no, etcétera. La realidad es que todos los casos pueden probarse de una sola vez:

Sean A y C dos matrices cualesquiera de $T(B)$, y sea λ un número real. Por definición, $AB = BA$ y $AC = CA$. Vamos a ver que efectivamente se cumplen las dos propiedades.

- La matriz $A + C$ conmuta con B, ya que, usando propiedades elementales de la suma y producto de matrices, se tiene que

  $$(A + C)B = AB + CB = BA + BC = B(A + C).$$

  Como puede verse, ha sido clave el hecho de que cada una de las dos matrices (A y C) conmuten individualmente con B. De la igualdad anterior se deduce que $A + C \in T(B)$.
- Por otro lado,

  $$(\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda(BA) = (\lambda B)A,$$

  utilizando de nuevo que A conmuta con B. Como consecuencia de la igualdad, hemos probado que la matriz λA también conmuta con B, por lo que $\lambda A \in T(B)$. De la unión de los dos apartados, se concluye que $T(B)$ **es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ para cualquier matriz B 2×2 real.**

Nota: También es posible probar este apartado escribiendo las matrices A, B y C de forma explícita:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

y comprobando las mismas operaciones,

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\right]$$

$$\lambda \left[\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right] = \left[\lambda \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix};$$

pero es una manera mucho más larga y complicada, por lo que no es un método recomendable.

3 (5 puntos) Hallar las ecuaciones cartesianas del siguientes subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$S := \mathrm{Span}\{(3,1,0,-1),(1,1,-1,-1),(7,1,2,-1)\}.$$

Este ejercicio tiene una infinidad de soluciones posibles (a partir de un conjunto de ecuaciones solución, cualquier otro que se obtenga mediante transformaciones elementales también lo es), y existen varios métodos posibles para obtener cualquiera de ellas. Vamos a exponer dos métodos diferentes, y esbozaremos un tercero que puede ser útil en otros casos. Se utilice el que se utilice, la finalidad es dar unas ecuaciones cartesianas correctas, entendiéndose por correctas que

- Todos los vectores que pertenecen S verifiquen cada una de las ecuaciones (Basta comprobarlo para unos generadores).
- Todo vector que no pertenezca a S no verifiquen todas las ecuaciones simultáneamente.
- Las ecuaciones sean linealmente independientes entre sí.

Coloquialmente, la primera condición puede interpretarse como que *no sobra ninguna ecuación* y la segunda como que *no falta ninguna ecuación*. La tercera condición puede no ser estrictamente necesaria; al ponerla se impide que se añadan ecuaciones reduntantes.

El primer paso consiste en obtener una base de S, ya que los generadores dados pueden ser linealmente dependientes entre sí. Colocamos los vectores por filas en una matriz y efectuamos transformaciones elementales hasta conseguir una matriz diagonal; es decir, con ceros bajo la diagonal principal. Como el segundo vector tiene un uno en la primera coordenada, lo colocamos primero para facilitar los cálculos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 7F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \Rightarrow \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego S está generado por los vectores $\{(1,1,-1,-1),\ (0,-2,3,2)\}$ y tiene dimensión 2. Vamos a exponer a continuación tres posibles formas de construir las ecuaciones cartesianas. Por teoría, el número de ecuaciones que hay que hallar es igual a la dimensiń de $\mathbb{R}^4$ menos la dimensión de S; es decir, $4-2=2$ ecuaciones.

a. El primer método utiliza una consecuencia del teorema de Rouché-Fröbenius: se colocan los vectores por columnas en una matriz y se añade una tercera columna con las variables (x_1,x_2,x_3,x_4). Luego se calcula la forma reducida de la matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -2 & x_2 \\ -1 & 3 & x_3 \\ -1 & 2 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 3 & x_3 + x_1 \\ 0 & 2 & x_4 + x_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \Rightarrow \\ F_3 + \frac{3}{2}F_2 \\ F_4 + F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ \hline 0 & 0 & x_3 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_4 + x_2 \end{array}\right)$$

Considerando; por un lado, las filas $1, 2$ y 3 de la matriz; y por otro, las filas $1, 2$ y 4; el sistema tendrá solución si y sólo si $x_3 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = 0$ y $x_4 + x_2 = 0$, respectivamente (para que el rango de la matriz ampliada sea 2, el mismo que el de la que forman las dos primeras columnas). Uniendo estas dos condiciones, se obtienen unas ecuaciones cartesianas de S:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

b. El segundo método se basa en que los coeficientes de las ecuaciones cartesianas equivalen a los vectores que forman una base del nÃºcleo. Para sacar partido de esto, se describe S mediante sus ecuaciones paramétricas y se invierten variables para obtener las cartesianas (también llamadas implícitas). Planteamos entonces un sistema de ecuaciones con los vectores que forman la base de S:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Se trata de un sistema de 2 ecuaciones (tantas como la dimensión de S) y 4 incógnitas (tantas como la dimensión de $\mathbb{R}^4$); luego su solución general tendrá dos parámetros. Para dar dicha solución, vamos a calcular la forma reducida de Gauss-Jordan de la matriz de coeficientes. Para conseguirla, simplemente hay que modificar la segunda columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ -\frac{1}{2}F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_1 - F_2 \\ \Rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Si declaramos c y d como variables libres, entonces $a = -\frac{1}{2}c$; y $b = \frac{3}{2}c + d$. Por tanto, escribiendo $c = \mu$ y $d = \lambda$, la solución general del problema es

$$\{\mu(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0) + \lambda(0, 1, 0, 1) : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0),\ (0, 1, 0, 1)\}.$$

Las ecuaciones cartesianas se obtienen mutiplicando cada uno de estos vectores por el vector de incógnitas (x_1, x_2, x_3, x_4) e igualando a cero:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde se obtienen de nuevo las dos ecuaciones de (1).

Nota: A veces por error se piensa que las ecuaciones del sistema (2) son las cartesianas correspondientes a S; pero esto es un error. De hecho, basta comprobar que, por ejemplo, la ecuación $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ no es válida para ninguno de los generadores de S.

c. El tercer método que vamos a ver sólo es útil para determinados subespacios vectoriales formados por vectores con muchos ceros; y consiste en obtener las ecuaciones *a mano*. Si se consiguen dos ecuaciones linealmente independiente entre sí y tales que todos los puntos de un conjunto cualquier de generadores de S verifiquen ambas ecuaciones; habremos conseguido una solución válida. En este caso concreto es bastante difícil de hacer, por lo que no es un método recomendable. Es fácil ver que en todos los generadores la segunda coordenada es igual a la cuarta, con el signo cambiado. Luego la ecuación $x_2 = x_4$ es una de las dos que estamos buscando. La segunda, sin embargo, es muy difícil de encontrar por tanteo. Sin embargo, para otros subespacios, este método puede resultar eficaz y mucho más rápido que los otros dos.

Por último, recordar que la solución a este problema no es única y que, en función del camino escogido y de cuánto se simplifiquen los generadores de S, se obtienen muchas ecuaciones diferentes. Algunas de las más habituales, junto con (1), son:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} -\frac{1}{2}x_1 & & & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$