



ALGEBRA I

**Examen Final, Convocatoria Ordinaria**  
**SOLUCIONES**

CURSO 2012/13

APELLIDOS  
DNI

NOMBRE

INSTRUCCIONES: Entregar UNICAMENTE estas hojas. Cuando se pide en un apartado responder V (verdadero) o F (falso), responder *únicamente* V o F, marcando adecuadamente la opción elegida. IMPORTANTE: Se prohíbe el uso de calculadoras, libros, apuntes, teléfonos móviles, y en general, de toda la tecnología moderna (posterior al bolígrafo).

IMPORTANTE: En los problemas II, III y IV las respuestas deben justificarse adecuadamente.

INFORMACION: Los puntos asignados a las preguntas SI o NO son: respuesta correcta, 1 punto, respuesta incorrecta, - 1 punto, en blanco, 0 puntos. Valor mínimo de cualquier problema: 0 puntos.

I) 1) Ninguna aplicación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^7$  es sobreyectiva. ☐ V ☐ F

*La imagen de una aplicación  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^7$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^7$  de dimensión  $\leq 3$ , por lo tanto no puede ser todo  $\mathbb{R}^7$ .*

2) Si  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^7$  es lineal, entonces  $\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Ran}(T) = 7$ , donde  $\text{Ker}(T)$  y  $\text{Ran}(T)$  denotan el núcleo y el rango (o imagen) de  $T$ , respectivamente. ☐ V ☐ F

*$\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Ran}(T)$  es igual a la dimensión del dominio de  $T$ , que es 3.*

3) Los espacios vectoriales  $\mathbb{C}^n$  y  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$  son isomorfos ( $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$  denota el espacio de polinomios en una variable, con coeficientes complejos y grado  $< n$ ). ☐ V ☐ F

*Ambos son espacios vectoriales complejos de dimensión  $n$ .*

4) Multiplicación por un número complejo define una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . ☐ V ☐ F

*Si llamamos  $c$  este número complejo y identificamos  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , obtenemos la aplicación  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto cz$ , que claramente es  $\mathbb{C}$ -lineal, y por lo tanto también  $\mathbb{R}$ -lineal.*

5) Multiplicación por un número complejo  $c$  define una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  cuyo determinante es  $|c|^2$ . ☐ V ☐ F

*Si el número complejo es  $c = a + ib$ , entonces la aplicación es  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , que claramente tiene determinante  $|c|^2$ .*

6) Suponemos que los productos de matrices  $AB$  y  $BA$  están bien definidos. Entonces  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , donde  $\text{tr}$  denota la traza. ☐ V ☐ F

$\text{Tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i (\sum_j A_{ij} B_{ji}) = \sum_j (\sum_i A_{ij} B_{ji}) = \sum_j (\sum_i B_{ji} A_{ij}) = \sum_j (BA)_{jj} = \text{Tr}(BA)$ .

7) Suponemos que los productos de matrices  $AB$  y  $BA$  están bien definidos. Entonces  $\det(AB) = \det(BA)$ . ☐ V ☐ F

*Toma  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Entonces  $AB = 2$ , mientras que  $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  tiene determinante cero.*

8) Suponemos que los productos de matrices  $AB$  y  $BA$  están bien definidos. Entonces  $AB$  es inversible si y solo si  $BA$  lo es. ☐ V ☐ F

Toma  $A, B$  como arriba.

9) Si una matriz tiene determinante positivo, entonces es diagonalizable.

V ☐ F ☒

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  tiene determinante 1, pero no existe una base de  $\mathbb{R}^2$  que consiste de autovectores de esta matriz.

10) Si la matriz  $A$  es diagonal,  $20 \times 20$ , y satisface  $A_{ii} > 0$  para todo  $i$ , entonces define un producto escalar  $(x, y) := x^T A y$  en  $\mathbb{R}^{20}$ .

☐ V ☒ F

La aplicación  $(\cdot, \cdot)$  es claramente bilineal y simétrica. Es definida positiva porque  $A_{ii} > 0$  para todo  $i$ .

II) Sean

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además, sean  $e_1, e_2, e_3$  los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

1) (5 puntos) Encuentra explícitamente la matriz  $Mat_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  que corresponde, con respecto a la base canónica, a la aplicación lineal  $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  determinada por  $S(e_1) = w_1$ ,  $S(e_2) = w_2$ ,  $S(e_3) = \vec{0}$ .

*La condición  $S(e_1) = w_1$  implica que la primera columna de la matriz que buscamos es  $w_1$ . De manera similar, la segunda y tercera columna son  $w_2$  y  $\vec{0}$ . Entonces la matriz que buscamos es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) (5 puntos) Encuentra explícitamente la matriz  $Mat_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  que corresponde, con respecto a la base canónica, a la aplicación lineal  $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  determinada por  $R(v_1) = e_1$ ,  $R(v_2) = e_2$ ,  $R(v_3) = e_3$ .

*Primero hallamos la matriz que describe  $R^{-1}$ . Nota que  $R^{-1}(e_1) = v_1$ ,  $R^{-1}(e_2) = v_2$ ,  $R^{-1}(e_3) = v_3$ .*

*Por lo tanto, argumentando como en 1), vemos la matriz que describe  $R^{-1}$  es  $A :=$*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*La matriz que describe  $R$  es su inversa  $A^{-1} =$*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) (5 puntos) Sea  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal determinada por  $T(v_1) = w_1$ ,  $T(v_2) = w_2$ ,  $T(v_3) = \vec{0}$ . Dar una base de la imagen de  $T$ .

*La imagen es  $\text{Span}\{w_1, w_2, \vec{0}\} = \text{Span}\{w_1, w_2\}$ . Como  $\{w_1, w_2\}$  es una familia linealmente independiente, entonces es una base de la imagen de  $T$ .*

4) (5 puntos) Encuentra explícitamente la matriz  $\text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  que corresponde, con respecto a la base canónica, a la aplicación lineal  $T$ .

*Tenemos  $T = S \circ R$ . La matriz que describe  $T$  por lo tanto es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{rcl} 5x - y - 2z & = & 1 \\ -2x + 6y - 3z & = & 3 \\ -2x - y + 4z & = & 10 \end{array} \right\}$$

- a) (10 puntos) Escribir el sistema en forma matricial  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  y calcular las soluciones del sistema o justificar que no las tiene.

*El sistema en forma matricial es*

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -2 & 6 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

*Resolvemos utilizando el método de Gauss:*

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 10 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{28}{5} & -\frac{19}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & \frac{16}{5} & \frac{52}{5} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{28}{5} & -\frac{19}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & \frac{45}{20} & \frac{225}{20} \end{array} \right).$$

*Obtenemos  $z = \frac{225}{45} = 5$ . De  $28y = 17 + 19 \cdot 5 = 112$  obtenemos  $y = 4$ . De  $5x = 4 + 10 + 1 = 15$  obtenemos  $x = 3$ .*

*En conclusión, la única solución es  $x = 3, y = 4, z = 5$ .*

b) (10 puntos) Hallar una base para el núcleo (kernel) de la siguiente matriz; hallar también una

base para su espacio de columnas: 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Haciendo operaciones de filas, llevamos la matriz a forma escalonada:*

$$\begin{aligned} A &:= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} := E_A \end{aligned}$$

*Para encontrar el núcleo de  $A$ , resolvemos el sistema homogéneo correspondiente a la matriz  $E_A$ . Las variables libres son  $x_3$  y  $x_5$ . Obtenemos  $x_4 = 0$ ,  $x_2 = -2x_3 - x_5$ , y de  $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$  obtenemos  $x_1 = -4x_3 - x_5$ . Por lo tanto el núcleo es*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4x_3 - x_5 \\ -2x_3 - x_5 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} : x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

*Una base del espacio de columnas de  $A$  consiste de las columnas de  $A$  correspondientes a las columnas de  $E_A$  que tienen pivotes, es decir, la primera, segunda y cuarta. Por lo tanto, una base del espacio de columnas de  $A$  es*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**IV)** 1) (5 puntos) Calcular el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ .

*A es una matriz triangular, entonces el determinante es el producto de los elementos en la diagonal:  $\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .*

2) (5 puntos) Encontrar los autovalores de la matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Calculamos  $\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$ , entonces los autovalores son 3 y -1.*

3) (5 puntos) Encontrar un autovector para cada autovalor de  $B$ .

*Recuerda que dado un autovalor  $\lambda$  de  $B$ , sus autovectores son todas las soluciones  $v$  de  $(B - \lambda I)v = \vec{0}$ , menos la solución trivial  $v = \vec{0}$ .*

*Para el autovalor 3: las soluciones de  $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$  son exactamente los múltiplos de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , por lo tanto  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  es un autovector.*

*Para el autovalor -1: las soluciones de  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$  son exactamente los múltiplos de  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , por lo tanto  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  es un autovector.*

4) (5 puntos) ¿Es la matriz  $B$  diagonalizable?

*Sí, es diagonalizable. Una razón es que existe una base de  $\mathbb{R}^2$  que consiste de autovectores de  $B$ : la base  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  hallada en 3). Otra razón es que, por el teorema espectral, todas las matrices (reales) simétricas son diagonalizables, y  $B$  es simétrica.*