

Hoja 6

1. Sea $M = \mathbb{R}^2$.

- a. Existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $df = xdy$?
- b. Existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $df = xdy + ydx$?

2. Sea M una variedad, $\alpha \in \Omega^1(M)$ una 1-forma, y $c: [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable. Definimos la integral de α a lo largo de c :

$$\int_c \alpha := \int_a^b \alpha_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt.$$

Demuestra que, si f es una función diferenciable en M , entonces

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

3. Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $f \in C^\infty(M)$. El *gradiente* de f es el campo vectorial $\text{grad}(f)$ en M definido por la propiedad:

$$g(\text{grad}(f), X) = df(X) \text{ para todo campo vectorial } X \text{ en } M.$$

Demuestra que:

- a. Para cada $p \in M$ tal que $df_p \neq 0$ la función

$$\{Y \in T_p M : |Y| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}, Y \mapsto df_p(Y)$$

tiene su valor máximo en $\frac{\text{grad}(f)_p}{|\text{grad}(f)_p|}$. Aquí utilizamos la notación $|Y| := \sqrt{g_p(Y, Y)}$.

- b. Sea $c: [a, b] \rightarrow M$ una curva integral de $\text{grad}(f)$. Entonces

$$f(c(b)) \geq f(c(a)).$$

Consejo para a): utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Consejo para b): utiliza el ejercicio 2.

4. Sea

$$O(3) = \{A \in \text{Mat}(3, \mathbb{R}) : A^T A = Id\}.$$

Cada $A \in O(3)$ induce un difeomorfismo $\Phi_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, w \rightarrow A \cdot w$. Además, sea $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera. Demuestra:

- a. Para cada $A \in O(3)$, Φ_A es una isometría de \mathbb{R}^3 (con su métrica Riemanniana estándar g).
- b. Para cada $A \in O(3)$, la aplicación Φ_A satisface $\Phi_A(S^2) = S^2$. Denotamos $\phi_A: S^2 \rightarrow S^2$ la aplicación inducida por restricción.
- c. Para cada $A \in O(3)$, la aplicación ϕ_A es una isometría de S^2 (con la métrica Riemanniana \bar{g} inducida por la métrica estándar en \mathbb{R}^3).
- d. Deduce de c. que, dados puntos $p, q \in S^2$, existe una isometría ϕ de S^2 con $\phi(p) = q$.
- e. Deduce de c. que el plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$ tiene una métrica Riemanniana tal que la proyección $\pi: S^2 \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ es una isometría local.

Recuerda (para a): Por las clases de cálculo, como Φ_A es una aplicación lineal, tenemos $D_p \Phi_A = A$ en cada $p \in \mathbb{R}^3$.

Recuerda (para d): Las matrices de $O(3)$ son exactamente las matrices cuyas columnas forman una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

Observación (para e): π es una isometría local si cada $p \in S^2$ tiene un entorno U tal que $\pi|_U: U \rightarrow \pi(U)$ es una isometría.

5. Considera el paraboloide

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3\},$$

con la métrica Riemanniana inducida por \mathbb{R}^3 . Describe la geodésica γ que satisface

$$\gamma(0) = (0, 0, 0) \quad \gamma'(0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{(0,0,0)}.$$

Consejo: Se puede decir bastante sobre γ sin hacer ninguna cuenta, utilizando el hecho que $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, x_3)$ induce por restricción una isometría de P .