Marco Zambon
Geometría III, curso 2011-12 a discutir: Jueves, 3/05/2012

Hoja 5

1. **a**. Sea $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Para cada $t \in \mathbb{R}$ obtenemos un difeomorfismo $e^{tA} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dado por $v \mapsto e^{tA}v$ donde $e^{tA} := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!}$ es la exponencial de matrices. Encuentra un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ cuyo flujo F_t sea dado por e^{tA}.

b. Tomamos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{R})$. Calcula explicitamente e^{tA} y el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ cuyo flujo es dado por e^{tA}.

2. Considera $\mathbb{R}^2$ con coordenadas x, y. Calcula los siguientes crochetes de Lie de campos vectoriales:

a. $[x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}]$

b. $[x\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}]$

3. Sea $n \geq 1$. Demuestra que $Mat(n, \mathbb{R})$, con $[A, B] := AB - BA$, es un álgebra de Lie.

4. Sea V un espacio vectorial y $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ una base de V. Sea $\{f_1, \dots, f_n\} \subset V^*$ la base dual. Dados vectores $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$ de V (aquí $a_i, b_i \in \mathbb{R}$), calcula

$$(f_1 \wedge f_2)(v, w).$$

5. Sea V un espacio vectorial y $\{f_1, \dots, f_n\} \subset V^*$ una base de V^*. Demuestra, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, que

$$\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\wedge^k V^*$.

6. Considera $\mathbb{R}^3$ con coordenadas x, y, z.

a. Calcula $(dx \wedge dy \wedge dz)(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z})$

b. Encuentra 2 campos vectoriales X y Y en $\mathbb{R}^3$, linealmente independientes en cada punto, tal que

$$(xdy + dz)(X) = (xdy + dz)(Y) = 0.$$