

Podéis encontrar una copia (con soluciones) del parcial del año pasado en la página web del curso: <http://www.uam.es/marco.zambon/SS12.html>

Hoja 3

1.

$$Q := \{(x, y) : x \in [-1, 1], y \in \{-1, 1\}\} \cup \{(x, y) : x \in \{-1, 1\}, y \in [-1, 1]\}$$

(el borde de un cuadrado) es una subvariedad de \mathbb{R}^2 ?

2 (por escrito). a. Demuestra que:

$$S := \{(x, y, \cos(x)\cos(y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

es una subvariedad de \mathbb{R}^3 .

b. Demuestra que:

$$g: S \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + y + z^2$$

es una aplicación diferenciable. Aquí S tiene la estructura de variedad diferencial dada como subvariedad de \mathbb{R}^3 , y \mathbb{R} su estructura canónica de variedad diferencial.

3. Sean M, N variedades diferenciales y $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Demuestra que

$$\text{grafo}(f) := \{(q, f(q)) : q \in M\}$$

es una subvariedad de $M \times N$.

4. Sea G un grupo, X un conjunto. Sea $\theta: G \times X \rightarrow X$ una aplicación. Para cada $g \in G$, denota por θ_g la aplicación $X \rightarrow X, x \mapsto \theta(g, x)$. Denota por $BiY(X)$ el grupo de biyecciones de X . Demuestra:

θ es una acción de G en $X \Leftrightarrow \theta: G \rightarrow BiY(X), g \mapsto \theta_g$ es un homomorfismo de grupos.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Considera el grupo $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (el grupo cíclico de n elementos) y para cada $m \in \mathbb{Z}$ denota por $[m]$ el elemento correspondiente en \mathbb{Z}_n .

a. Demuestra que

$$\Theta: \mathbb{Z}_n \times S^1 \rightarrow S^1, ([m], z) \mapsto e^{2\pi i \frac{m}{n}} z$$

es una acción diferenciable de \mathbb{Z}_n en la variedad $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

b. Demuestra que S^1/\mathbb{Z}_n tiene una estructura de variedad diferencial tal que la proyección $\pi: S^1 \rightarrow S^1/\mathbb{Z}_n$ es un difeomorfismo local.

6. a. Sean M_i variedades diferenciales y $p_i \in M_i$, por $i = 1, 2$. Demuestra que la aplicación canónica

$$\Phi: T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2, \quad [(\gamma_1, \gamma_2)]_{M_1 \times M_2} \mapsto ([\gamma_1]_{M_1}, [\gamma_2]_{M_2})$$

(donde γ_i denota curvas diferenciables en M_i con $\gamma_i(0) = p_i$) está bien definida y es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Girar pagina...

b. Sea M una variedad diferencial y $p \in M$. Sea

$$i: M \rightarrow M \times M, q \mapsto (q, q).$$

Calcula la derivada de i en p , es decir,

$$i_*(p): T_p M \rightarrow T_{(p,p)}(M \times M) \cong T_p M \times T_p M.$$