

Hoja 2

1. Para cada $\alpha \in [0, 1]$, considera la aplicación

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1, t \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi i t \alpha}),$$

donde $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Supongamos que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

a. Demuestra que Φ es inyectiva y continua.

b. Demuestra que $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \Phi(\mathbb{R})$ no es un homeomorfismo. Por qué no hay ninguna contradicción con la pregunta 4a de la hoja 1? (Aquí $\Phi(\mathbb{R})$ tiene la topología subespacio inducida por el toro $S^1 \times S^1$).

c. Es $\Phi(\mathbb{R})$ es una variedad topológica o no?

2. Sea K una superficie topológica compacta, conexa y con borde. Demuestra que el borde ∂K tiene un número finito de componentes conexas.

3. Demuestra para el espacio proyectivo $P_2(\mathbb{R})$, la banda de Möbius M , la botella de Klein K y el toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$:

a. $\chi(P_2(\mathbb{R})) = 1$

b. $\chi(K) = 0$

c. $\chi(M) = 0$

d. $\chi(\mathbb{T}) = 0$

Consejo: Para a. puedes utilizar el hecho que $\chi(S^2) = 2$

4. A cual superficie en la lista (de superficies compactas, conexas, con borde) es homeomorfa la suma conexa

$$\mathbb{T} \# C,$$

donde $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ y $C = S^1 \times [0, 1]$?

5 (Por escrito). Demuestra que si M, N, L son variedades diferenciales y $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow L$ aplicaciones diferenciables, entonces $g \circ f: M \rightarrow L$ es una aplicación diferenciable.

6. Encuentra una estructura de variedad diferencial en

$$Q := \{(x, y) : x \in [-1, 1], y \in \{-1, 1\}\} \cup \{(x, y) : x \in \{-1, 1\}, y \in [-1, 1]\}$$

(el borde de un cuadrado) con la topología subespacio inducida por \mathbb{R}^2 .

7. Sea M una variedad diferencial conexa y p, q puntos de M . Demuestra que existe una aplicación diferenciable $c: [0, 1] \rightarrow M$ tal que $c(0) = p, c(1) = q$.

Observación: Como $[0, 1]$ no es una variedad diferencial segundo la definición dada en clase (porque tiene borde), hay que definir cuando una aplicación $c: [0, 1] \rightarrow M$ es diferenciable: lo es cuando existe un $\epsilon > 0$ y una aplicación diferenciable $\tilde{c}: (-\epsilon, 1 + \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\tilde{c}|_{[0, 1]} = c$.

Consejo: Puedes utilizar, sin demostración, el hecho que una variedad topológica conexa es automáticamente conexa por caminos.