

## Hoja 2

1. Para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , considera la aplicación

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1, t \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi it\alpha}),$$

donde  $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Supongamos que  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ .

- a. Demuestra que  $\Phi$  es inyectiva y continua.
- b. Demuestra que  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \Phi(\mathbb{R})$  no es un homeomorfismo. Por qué no hay ninguna contradicción con la pregunta 4a de la hoja 1? (Aquí  $\Phi(\mathbb{R})$  tiene la topología subespacio inducida por el toro  $S^1 \times S^1$ ).
- c. Es  $\Phi(\mathbb{R})$  es una variedad topológica o no?
- 2. Sea  $K$  una superficie topológica compacta, conexa y con borde. Demuestra que el borde  $\partial K$  tiene un numero finito de componentes conexas.
- 3. Demuestra para el espacio proyectivo  $P_2(\mathbb{R})$ , la banda de Möbius  $M$ , la botella de Klein  $K$  y el toro  $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ :
  - a.  $\chi(P_2(\mathbb{R})) = 1$
  - b.  $\chi(K) = 0$
  - c.  $\chi(M) = 0$
  - d.  $\chi(\mathbb{T}) = 0$

**Consejo:** Para a. puedes utilizar el hecho que  $\chi(S^2) = 2$

4. A cual superficie en la lista (de superficies compactas, conexas, con borde) es homeomorfa la suma conexa

$$\mathbb{T} \# C,$$

donde  $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$  y  $C = S^1 \times [0, 1]$ ?

- 5 (Por escrito). Demuestra que si  $M, N, L$  so variedades diferenciales y  $f: M \rightarrow N$ ,  $g: N \rightarrow L$  aplicaciones diferenciables, entonces  $g \circ f: M \rightarrow L$  es una aplicación diferenciable.

6. Encuentra una estructura de variedad diferencial en

$$Q := \{(x, y) : x \in [-1, 1], y \in \{-1, 1\}\} \cup \{(x, y) : x \in \{-1, 1\}, y \in [-1, 1]\}$$

(el borde de un cuadrado) con la topología subespacio inducida por  $\mathbb{R}^2$ .

7. Sea  $M$  una variedad diferencial conexa y  $p, q$  puntos de  $M$ . Demuestra que existe una aplicación diferenciable  $c: [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $c(0) = p, c(1) = q$ .

**Observación:** Como  $[0, 1]$  no es una variedad diferencial segundo la definición dada en clase (porque tiene borde), hay que definir cuando una aplicación  $c: [0, 1] \rightarrow M$  es diferenciable: lo es cuando existe un  $\epsilon > 0$  y una aplicación diferenciable  $\tilde{c}: (-\epsilon, 1 + \epsilon) \rightarrow M$  tal que  $\tilde{c}|_{[0,1]} = c$ .

**Consejo:** Puedes utilizar, sin demostración, el hecho que una variedad topología conexa es automáticamente conexa por caminos.