Marco Zambon
Geometría III, curso 2011-12

Hoja 1

1. Sea M una variedad topológica de dimension n con borde. Demuestra:

a. $Int(M)$ es una variedad topológica de dimension n (sin borde).

b. ∂M es una variedad topológica de dimension $n-1$ (sin borde).

Solución:

a) Sea $p \in Int(M)$. Por definición de interior, existe un abierto $U \subset M$ con $p \in U$ y un homeomorfismo $\phi\colon U \to \phi(U)$ a un abierto de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ tal que

$$\phi(p) \in \mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+} : x_n > 0\}.$$

Sea V un entorno abierto de $\phi(p)$ en $\mathbb{R}^n_+$. Entonces

$$\phi|_{U\cap\phi^{-1}(V)}\colon U \cap \phi^{-1}(V) \to \phi(U) \cap V$$

es un homeomorfismo a un entorno abierto de $\phi(p)$ en $\mathbb{R}^n_+$. Nota que $U\cap\phi^{-1}(V) \subset Int(M)$ (por definición de interior).

Arriba vimos que $\phi(U)\cap V$ es abierto en $\mathbb{R}^n_+$, y nota que $\mathbb{R}^n_+$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, así que $\phi(U)\cap V$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. En conclusión, hemos demostrado que cada punto de $Int(M)$ tiene un entorno abierto en $Int(M)$ que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, es decir, que $Int(M)$ es una variedad topológica de dimension n.

b) Sea $p \in \partial M$. Por definición de borde, existe un abierto $U \subset M$ con $p \in U$ y un homeomorfismo $\phi\colon U \to \phi(U)$ a un abierto de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ con $\phi(p) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Restringiendo el dominio y codominio, obtenemos un homeomorfismo

$$\phi|_{\partial M\cap U}\colon \partial M \cap U \to \phi(\partial M \cap U).$$

Nota que $\partial M \cap U$ es un entorno abierto de p en ∂M, por la definición de topología subespacio. Por el ejercicio 2), para todo $q \in U$ tenemos: $q \in \partial M$ si y solo si $\phi(q) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Eso implica que $\phi(\partial M \cap U) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$, lo cual – por definición de topología subespacio – es un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$.

En conclusión, hemos demostrado que $\phi|_{\partial M\cap U}$ es un homeomorfismo de $\partial M \cap U$ a un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$, y por lo tanto que ∂M es una variedad topoógica de dimension $n-1$.