Marco Zambon
Geometría III, curso 2011-12

a discutir: 21/02/2012

Hoja 1

1. Considera
$$M := \{(x, 0) : x < 0\} \cup \{(x, y) : x \geq 0, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$
con la topología subespacio inducida por $\mathbb{R}^2$.

a. Demuestra que M no es una variedad topológica.

b. Demuestra que M no es una variedad topológica con borde.

Consejo: Utiliza el teorema de invariancia del dominio.

2. Sea M una variedad topológica de dimension n con borde, $p \in M$ y (U, ϕ) una carta con $p \in U$.

Demuestra: si $\phi(p) \in R^{n-1} \times \{0\}$, entonces para toda otra carta (U', ϕ') con $p \in U'$, tenemos $\phi'(p) \in R^{n-1} \times \{0\}$.

Consejo: Utiliza el teorema de invariancia del dominio.

3. Sea M una variedad topológica de dimension n con borde. Demuestra:

a. $Int(M)$ es una variedad topológica de dimension n (sin borde).

b. ∂M es una variedad topológica de dimension $n - 1$ (sin borde).

4. **a**. Sea X un espacio topológico compacto, Y un espacio topológico Hausdorff, y $f \colon X \to Y$ una biyección continua. Demuestra: entonces f es un homeomorfismo.

b. Sea Z un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en Z. Denota por $\pi \colon Z \to Z/\sim$ la aplicación canonica al espacio cociente. Describe las condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación $F \colon Z \to Y$ induzca una aplicación $\tilde{F} \colon Z/\sim \to Y$ (es decir, para que exista una aplicación $\tilde{F}$ tal que $F = \tilde{F} \circ \pi$). En este caso, demuestra que F es continua si y solo si $\tilde{F}$ es continua.

c. Sea Z un espacio topológico compacto, $\sim$ una una relación de equivalencia en Z, y Y un espacio topológico Hausdorff. Sea $F \colon Z \to X$ una aplicación continua, sobreyectiva, y tal que $z \sim z' \Leftrightarrow F(z) = F(z')$. Demuestra: F induce un homeomorfismo $\tilde{F} \colon Z/\sim \to Y$.

Nota: Para a. es útil saber que un subconjunto compacto de un espacio topologico Hausdorff es automaticamente cerrado.

5. **a**. Sea $P_1(\mathbb{R})$ el cociente de $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ por la relación de equivalencia $z \sim -z$. A qué es homeomorfo $P_1(\mathbb{R})$?

b. Sea $M := P_2(\mathbb{R})$, definida como en clase. El borde ∂M está vacio o no? Demuestra.

c. $P_2(\mathbb{R})$ es compacto o no? Demuestra.