Marco Zambon 27/03/2012
Geometría III, curso 2011-12

Solución al examen Parcial

---

1 (8 puntos)**.** Considera $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1\}$ con la relación de equivalencia

$$v \sim_a w \Leftrightarrow (v = w \text{ o bien } v = -w).$$

Considera también $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ con la relación de equivalencia

$$v \sim_b w \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : v = \lambda \cdot w.$$

Encuentra *explicitamente* un homeomorfismo

$$S^2/\sim_a \to (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim_b,$$

y demuestra que es un homeomorfismo.
Nota: En clase vimos que existe un tal homeomorfismo (ambos cocientes son homeomorfos al plano proyectivo). Aquí os pido de escribir *explicitamente* un tal homeomorfismo.

Solución: *Denota $\pi_a \colon S^2 \to S^2/\sim_a$ la proyección canonica, y para $v \in S^2$ denota $[v]_a := \pi_a(v)$ (la clase de equivalencia de v). De manera similar, denota $\pi_b \colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 - \{0\}/\sim_b$ la proyección canonica, y para $z \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ denota $[z]_b := \pi_b(z)$. Considera*

$$F \colon S^2/\sim_a \to \mathbb{R}^3 - \{0\}/\sim_b, \quad [v]_a \to [v]_b.$$

Esta aplicación está bien definida, porque $[v]_b = [-v]_b$ para todo $v \in S^2$ (ya que $-v = (-1) \cdot v$).

F is injectiva: si para $v, w \in S^2$ existe $\lambda \neq 0$ tal que $v = \lambda \cdot w$, entonces $|v| = 1 = |w|$ implica que necesariamente $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$, y por lo tanto $[v]_a = [w]_a$.

F es sobreyectiva: dado $z \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, tenemos $F([\frac{z}{|z|}]_a) = [\frac{z}{|z|}]_b = [z]_b$. Entonces F es biyectiva, y $F^{-1}([z]_b) = [\frac{z}{|z|}]_a$.

La aplicación $f \colon S^2 \to \mathbb{R}^3 - \{0\}, v \mapsto v$ es continua.

$$\pi_b \circ f \colon S^2 \to (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim_b$$

satisface $(\pi_b \circ f) = F \circ \pi_a$. Como $\pi_b \circ f$ es continua, F también lo es (por el ejercicio 4 de la hoja 1).

La aplicación $g \colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to S^2, z \mapsto \frac{z}{|z|}$ es continua.

$$\pi_a \circ g \colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to S^2/\sim_a$$

satisface satisface $(\pi_a \circ g) = F^{-1} \circ \pi_b$. Como $\pi_a \circ g$ es continua, F^{-1} también lo es (por el ejercicio 4 de la hoja 1). En conclusión, F es un homeomorfismo.

2 (7 puntos)**.** Considera

$$S := ([0,1] \times [0,1]) - \cup_{i=1}^{5} D_i,$$

donde $D_1, \ldots, D_5$ son discos abiertos en $(0,1) \times (0,1)$ tal que $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Considera $S/\sim$, donde la relación de equivalencia $\sim$ es la siguiente: cada punto es equivalente a sí mismo, y además $(0, y) \sim (1, 1-y)$ para todo $y \in [0,1]$.

¿ A qué superficie en la lista de superficies compactas, conexas, con borde es homeomorfa $S/\sim$? Demuestralo.

Solución: *$S/\sim$ es homeomorfo a*

$$P_2(\mathbb{R}) - \cup_{i=1}^{6} D_i',$$

donde los D_i' son discos abiertos en $P_2(\mathbb{R})$ tal que sus cierres son disjuntos dos a dos.

Está claro que S es la banda de Möbius M menos 5 discos abiertos. Ahora utilizamos el hecho, visto en clase, que pegando la banda de Möbius M y un disco cerrado a lo largo de sus bordes se obtiene $P_2(\mathbb{R})$. Entonces $M \cong P_2(\mathbb{R}) - D_1'$, donde D_1' es un disco abierto en $P_2(\mathbb{R})$. Por lo tanto S es homeomorfo a $P_2(\mathbb{R})$ menos 6 discos abiertos.

3 (8 puntos)**.** Sea $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1\}$, con su estructura diferencial standard. Sea $\mathbf{S} := (0, 0, -1) \in S^2$. Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se denota por $|(x, y, z)| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ su norma.

¿ Es la función

$$f \colon S^2 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto |v - \mathbf{S}|$$

diferenciable? Demuestralo.
Nota: Puedes utilizar que una carta diferencial de S^2 es dada por la proyección estereográfica ϕ_N, y que su inversa es

$$(\phi_N)^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{\mathbf{N}\}, \;\; (u, v) \mapsto \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1),$$

donde $\mathbf{N} := (0, 0, 1)$.

Solución: *No, f no es diferenciable en el punto $\boldsymbol{S}$.*

Primero, escribimos f así:

$$f((x, y, z)) = |(x, y, z) - \boldsymbol{S}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{1 + 2z + 1} = \sqrt{2(z+1)}.$$

Tomamos la carta ϕ_N. Obtenemos

$$f \circ (\phi_N)^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \sqrt{2(\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} + 1)} = 2\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^2 + v^2 + 1}},$$

es decir, $(f \circ (\phi_N)^{-1})(X) = 2\frac{|X|}{\sqrt{|X|^2+1}}$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$. Esta función no es diferenciable en el origen de $\mathbb{R}^2$ (ya que la norma no lo es).

4 (7 puntos)**.** Si M es una variedad diferencial y S, R son subvariedades de M tal que $dim(S) = dim(R)$, ¿ es verdad que la union $S \cup R$ es siempre una subvariedad de M? Demuestralo.

Solución: *No.*

Un contraejémplo es lo siguiente. Sea $M = \mathbb{R}^2$ (con su estructura standard de variedad diferencial). Sea $S = \mathbb{R} \times \{0\}$ (el eje x), y $R = \{0\} \times \mathbb{R}$ (el eje y). S y R son subvariedades de M de dimensión 1: $(\mathbb{R}^2, Id_{\mathbb{R}^2})$ es una carta de M adaptada a S, y $(\mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x))$ es una carta de M adaptada a R.

La unión $S \cup R$ no es una subvariedad de M. Una manera de verlo es: si lo fuera, entonces $S \cup R$ sería una variedad diferencial de dimensión 1. Pero existe un entorno conexo U del origen 0 en $S \cup R$ tal que $U - \{0\}$ tiene 4 componentes conexas, entonces U no puede ser homeomorfo a un intervalo.