Marco Zambon 27/03/2012
Geometría III, curso 2011-12

Examen Parcial

Tu nombre:
Tu DNI:

(deja esta tabla vacía)

Ej. 1	
Ej. 2	
Ej. 3	
Ej. 4	
Total (de 30)	

Instrucciones: Utiliza una hoja distinta para cada problema, y en cada hoja escribe tu nombre y el número del problema.
Justifica todas tus respuestas. Puedes utilizar, citándolos de manera apropriada, resultados que hemos obtenido en clase o en los ejercicios para casa.

---

1 (8 puntos)**.** Considera $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1\}$ con la relación de equivalencia

$$v \sim_a w \Leftrightarrow (v = w \text{ o bien } v = -w).$$

Considera también $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ con la relación de equivalencia

$$v \sim_b w \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : v = \lambda \cdot w.$$

Encuentra *explicitamente* un homeomorfismo

$$S^2/\sim_a \to (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim_b,$$

y demuestra que es un homeomorfismo.
Nota: En clase vimos que existe un tal homeomorfismo (ambos cocientes son homeomorfos al plano proyectivo). Aquí os pido de escribir *explicitamente* un tal homeomorfismo.

2 (7 puntos)**.** Considera

$$S := ([0,1] \times [0,1]) - \cup_{i=1}^{5} D_i,$$

donde $D_1, \ldots, D_5$ son discos abiertos en $(0,1) \times (0,1)$ tal que $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Considera $S/\sim$, donde la relación de equivalencia $\sim$ es la siguiente: cada punto es equivalente a sí mismo, y además $(0,y) \sim (1, 1-y)$ para todo $y \in [0,1]$.

¿ A qué superficie en la lista de superficies compactas, conexas, con borde es homeomorfa $S/\sim$? Demuestralo.

3 (8 puntos)**.** Sea $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1\}$, con su estructura diferencial standard. Sea $\mathbf{S} := (0,0,-1) \in S^2$. Para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se denota por $|(x,y,z)| := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ su norma.

¿ Es la función

$$f\colon S^2 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto |v - \mathbf{S}|$$

diferenciable? Demuestralo.
Nota: Puedes utilizar que una carta diferencial de S^2 es dada por la proyección estereográfica ϕ_N, y que su inversa es

$$(\phi_N)^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{\mathbf{N}\}, \;\; (u,v) \mapsto \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1),$$

donde $\mathbf{N} := (0,0,1)$.

4 (7 puntos)**.** Si M es una variedad diferencial y S, R son subvariedades de M tal que $dim(S) = dim(R)$, ¿ es verdad que la union $S \cup R$ es siempre una subvariedad de M? Demuestralo.