Marco Zambon 23/05/2012
Geometría III, curso 2011-12

Exámen Final

Tu apellido: Tu nombre:
Tu grupo (46 o 50): Tu DNI:

(deja esta tabla vacía)

Ej. 1	
Ej. 2	
Ej. 3	
Ej. 4	
Ej. 5	
Ej. 6	
Total (de 100)	

Instrucciones: Utiliza una hoja distinta para cada problema, y en cada hoja escribe tu nombre y el número del problema.
Justifica todas tus respuestas. Puedes utilizar, citándolos de manera apropiada, resultados que hemos obtenido en clase o en los ejercicios para casa.

1 (15+5 puntos)**.** Sean S y S' dos superficies topológicas compactas y conexas. Sea S orientable, con 2 componentes de borde, y característica de Euler $\chi(S) = -4$. Sea S' no orientable, sin borde, con característica de Euler $\chi(S') = -3$.

a) A cual superficie en la lista de superficies topológicas compactas con borde es homeomorfa la suma conexa
$$S \ \sharp \ S' \ ?$$

b) Sea $D \subset S$ un disco abierto y $D' \subset S'$ un disco abierto. A cual superficie en la lista de superficies topológicas compactas con borde es homeomorfa la suma conexa
$$(S - D) \ \sharp \ (S' - D') \ ?$$

Justifica tus respuestas.

2 (10+10 puntos)**.** Sea M una variedad diferenciable y $f \colon M \to \mathbb{R}^5$ una aplicación diferenciable. Sea $\text{grafo}(f) := \{(p, f(p)) : p \in M\}$.

a) Encuentra una aplicación diferenciable $G\colon M \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ con las dos siguientes propriedades: la origen $0 \in \mathbb{R}^5$ es un valor regular de G, y $G^{-1}(0) = \text{grafo}(f)$.

b) Sabemos que grafo(f) es una subvariedad de $M \times \mathbb{R}^5$, así que para todo $p \in M$, $T_{(p,f(p))}\text{grafo}(f)$ es un subespacio vectorial de $T_{(p,f(p))}(M \times \mathbb{R}^5) \cong T_pM \times T_{f(p)}\mathbb{R}^5$.
Es verdad que para todo $p \in M$ tenemos

$$T_{(p,f(p))}\text{grafo}(f) = \{(v, f_*(p)v) : v \in T_pM\} \text{ ?}$$

Justifica tus respuestas.

3 (5+10 puntos)**.** Sea S^7 la esfera de dimensión 7 y S^5 la esfera de dimensión 5.

a) Existe una aplicación diferenciable $S^7 \to S^5$?

b) Existe una inmersión $S^7 \to S^5$?

Justifica tus respuestas.
Recuerda: una aplicación entre variedades diferenciables $f\colon M \to N$ es una inmersión si es diferenciable y $f_*(p)$ es inyectiva para todo $p \in M$.

4 (10+10 puntos)**.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea X el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por $X|_p = A \cdot p \in \mathbb{R}^3$ (aquí identificamos de manera canonica $T_p\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^3$, y "$A \cdot p$" denota el producto de dos matrices). Para todo $p \in \mathbb{R}^3$ sea τ_p la curva integral de X que satisface $\tau_p(0) = p$.

a) Encuentra explicitamente τ_p (es decir, halla su formula).

b) Para cuales $p \in \mathbb{R}^3$ es τ_p la curva constante (es decir, $\tau_p(t) = p$ para todo t en el dominio de la curva τ_p)?

Justifica tus respuestas.

5 (5+10 puntos)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión 4. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de V.

a) Cual es la dimensión de $\wedge^2 V^*$?

b) Cual es la dimensión del subespacio vectorial $\{\omega \in \wedge^2 V^* : \omega(e_1, e_2) = 0\}$?

Justifica tus respuestas.

6 (10 puntos)**.** Sean (M, g) y (M', g') dos variedades Riemannianas. Sea $F\colon M \to M'$ un difeomorfismo tal que $|F_*(p)v| = |v|$ para todo $p \in M$ y $v \in T_pM$.

Es verdad que F es una isometría?

Justifica tu respuesta.
Observación: $|v|$ es la norma de v, es decir, $|v| = \sqrt{g_p(v,v)}$. $|F_*(p)v|$ está definido de manera análoga.
Recuerda: Una isometría entre (M, g) y (M', g') es un difeomorfismo f tal que $g_p(v, w) = g'_{f(p)}(f_*(p)v, f_*(p)w)$ para todo $p \in M$ y $v, w \in T_pM$.
Consejo: Considera $|v + w|$ para todo $p \in M$ y $v, w \in T_pM$.