Marco Zambon a discutir: Miercoles, 18/05/2011
Geometría III, curso 2010-11

Hoja 6

1. Sea $F\colon M \to N$ una submersión sobreyectiva entre variedades. Demuestra para todo $k \geq 0$ que la aplicación lineal (definida en clase)

$$\Omega^k(N) \to \Omega^k(M), \alpha \mapsto F^*\alpha$$

es inyectiva.
Recuerda: una aplicación diferenciable F es una submersión si en todo $p \in M$, la derivada $F_*(p)$ es sobreyectiva.

2. Sea $M = \mathbb{R}^2$.

a. Existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $df = xdy$?

b. Existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $df = xdy + ydx$?

3. Sea M una variedad, $\alpha \in \Omega^1(M)$ una 1-forma, y $c\colon [a,b] \to M$ una curva diferenciable. Definimos *la integral de α a lo largo de c*:

$$\int_c \alpha := \int_a^b \alpha_{c(t)}(\dot{c}(t))dt.$$

Demuestra que, si f es una función diferenciable en M, entonces

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

4. Sea (M,g) una variedad Riemanniana y $f \in C^\infty(M)$. El *gradiente* de f es el campo vectorial $grad(f)$ en M definido por la propriedad:

$$g(grad(f), X) = df(X) \text{ para todo campo vectorial } X \text{ en } M.$$

Demuestra que:

a. Para cada $p \in M$ tal que $df_p \neq 0$ la función

$$\{Y \in T_pM : |Y| = 1\} \to \mathbb{R}, Y \mapsto df_p(Y)$$

tiene su valor máximo en $\frac{grad(f)_p}{|grad(f)_p|}$. Aquí utilizamos la notación $|Y| := \sqrt{g_p(Y,Y)}$.

b. Sea $c\colon [a,b] \to M$ una curva integral de $grad(f)$. Entonces

$$f(c(b)) \geq f(c(a)).$$

Consejo para b): utiliza el ejercicio 3.

5. Sea

$$O(3) = \{A \in Mat(3, \mathbb{R}) : A^T A = Id\}.$$

Cada $A \in O(3)$ induce un difeomorfismo $\Phi_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, w \to A \cdot w$. Además, sea $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera. Demuestra:

- **a**. Para cada $A \in O(3)$, Φ_A es una isometría de $\mathbb{R}^3$ (con su metrica Riemanniana éstandard g).
- **b**. Para cada $A \in O(3)$, la aplicación Φ_A satisface $\Phi_A(S^2) = S^2$. Denotamos $\phi_A \colon S^2 \to S^2$ la aplicación inducida por restricción.
- **c**. Para cada $A \in O(3)$, la aplicación ϕ_A es una isometrá de S^2 (con la metrica Riemannniana $\bar{g}$ inducida por la metrica estándard en $\mathbb{R}^3$).
- **d**. Deduce de **c**. que, dados puntos $p, q \in S^2$, existe una isometría ϕ de S^2 con $\phi(p) = q$.
- **e**. Deduce de **c**. que el plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$ tiene una metrica Riemanniana tal que la proyección $\pi \colon S^2 \to P_2(\mathbb{R})$ es una isometría local.

Recuerda (para a): Por las clases de calculo, como Φ_A es una aplicación lineal, tenemos $D_p\Phi_A = A$ en cada $p \in \mathbb{R}^3$.
Recuerda (para d): Las matrices de $O(3)$ son exactamente las matrices cuyas columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
Observación (para e): π es una isometría local si cada $p \in S^2$ tiene un entorno U tal que $\pi|_U \colon U \to \pi(U)$ es una isometría.

6. Considera el paraboloide

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3\},$$

con la metrica Riemanniana inducida por $\mathbb{R}^3$. Describe la geodésica γ que satisface

$$\gamma(0) = (0, 0, 0) \qquad \dot{\gamma}(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}|_{(0,0,0)}.$$

Consejo: Se puede decir bastante sobre γ sin hacer ninguna cuenta, utilizando el hecho que $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, x_3)$ induce por restricción una isometría de P.