Marco Zambon
Geometría III, curso 2010-11

a discutir: Miercoles, 13/04/2011

Hoja 4

1. Considera
$$M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\}.$$

a) Demuestra que M es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

b) Encuentra bases de T_pM y T_qM, donde $p := (0, 0, 0) \in M$ y $q := (1, 3, 10) \in M$.

Observación: Por a) sabemos que M es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$, así que $T_qM \subset T_q\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$. Una base de $T_q\mathbb{R}^3$ es dada por $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_q, \frac{\partial}{\partial x_2}|_q, \frac{\partial}{\partial x_3}|_q\}$ (corresponde a la base canonica de $\mathbb{R}^3$ bajo la identificación $T_q\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$). Por lo tanto cada elemento de T_qM es de la forma $a\frac{\partial}{\partial x_1}|_q + b\frac{\partial}{\partial x_2}|_q + c\frac{\partial}{\partial x_3}|_q$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2 (**Teorema de la función inversa**). Demuestra: sea $f\colon M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciales, y sea $p \in M$, entonces:

$$f_*(p)\colon T_pM \to T_{f(p)}N \text{ es un isomorfismo} \Leftrightarrow f \text{ es un difeomorfismo local en } p.$$

3. Demuestra que
$$SL(n; \mathbb{R}) := \{A \in Mat(n; \mathbb{R}) : det(A) = 1\}$$
es una subvariedad de $Mat(n; \mathbb{R})$. ¿Cual es su dimensión?

4. Para qué $c \in \mathbb{R}$ es $g^{-1}(c)$ una subvariedad de $\mathbb{R}^2$, donde

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy?$$

5. Sean M, N variedades diferenciales y $f\colon M \to N$ una aplicación diferenciable. Demuestra que
$$G\colon M \to M \times N, x \mapsto (x, f(x))$$
es un embebimiento.

6. Considera el campo vectorial $X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ en $\mathbb{R}^n$.
Cual es el flujo de X?