Marco Zambon
Geometría III, curso 2010-11 a discutir: Miercoles, 23/03/2011

Hoja 3

1.
$$Q := \{(x,y) : x \in [-1,1], y \in \{-1,1\}\} \cup \{(x,y) : x \in \{-1,1\}, y \in [-1,1]\}$$
(el borde de un cuadrado) es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$?

2 (Facil)**.** Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, y $f\colon U \to V$ una aplicación. Demuestra que f es diferenciable en el sentido de las clases de calculo (es decir, como aplicación entre abiertos del espacio euclideo) si y solo si f, considerada como aplicación entre variedades diferenciales, es diferenciable.
Recuerda: La estructura de variedad diferencial de U es el átlas diferencial maximal que contiene la carta $Id_U\colon U \to U$.

3 (Facil)**.** **a**. Demuestra que:
$$S := \{(x, y, cos(x)cos(y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$$
es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

b. Demuestra que:
$$g\colon S \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x + y + z^2$$
es una aplicación diferenciable. Aquí S tiene la estructura de variedad diferencial dada como subvariedad de $\mathbb{R}^3$, y $\mathbb{R}$ su estructura canonica de variedad diferencial.

4. Sean M, N variedades diferenciales y $f\colon M \to N$ una aplicación diferenciable. Demuestra que
$$\text{grafo}(f) := \{(q, f(q)) : q \in M\}$$
es una subvariedad de $M \times N$.

5. Sea G un grupo, X un conjunto. Sea $\theta\colon G \times X \to X$ una aplicacíon. Para cada $g \in G$, denota por θ_g la applicación $X \to X, x \mapsto \theta(g,x)$. Denota por $Biy(X)$ el grupo de biyecciones de X. Demuestra:
θ es una acción de G en X $\Leftrightarrow$ $\theta\colon G \to Biy(X), g \mapsto \theta_g$ es un homomorfismo de grupos.

6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Considera el grupo $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (el grupo cíclico de n elementos) y para cada $m \in \mathbb{Z}$ denota por $[m]$ el elemento correspondiente en $\mathbb{Z}_n$.

a. Demuestra que
$$\Theta\colon \mathbb{Z}_n \times S^1 \to S^1, \quad ([m], z) \mapsto e^{2\pi i \frac{m}{n}} z$$
es una acción diferenciable de $\mathbb{Z}_n$ en la variedad $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

b. Demuestra que $S^1/\mathbb{Z}_n$ tiene una estructura de variedad diferencial tal que la proyección $\pi\colon S^1 \to S^1/\mathbb{Z}_n$ es un difeomorfismo local.

Girar pagina...

7. **a**. Sean M_i variedades diferenciales y $p_i \in M_i$, por $i = 1, 2$. Demuestra que la aplicación canónica

$$\Phi\colon T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2, \quad [(\gamma_1, \gamma_2)]_{M_1 \times M_2} \mapsto ([\gamma_1]_{M_1}, [\gamma_2]_{M_2})$$

(donde γ_i denota curvas diferenciables en M_i con $\gamma_i(0) = p_i$) está bien definida y es un isomorfismo de espacios vectoriales.

b. Sea M una variedad diferencial y $p \in M$. Sea

$$i\colon M \to M \times M, q \mapsto (q, q).$$

Calcula la derivada de i en p, es decir,

$$i_*(p)\colon T_pM \to T_{(p,p)}(M \times M) \cong T_pM \times T_pM.$$