Marco Zambon a discutir: Martes, 08/03/2011
Geometría III, curso 2010-11

Hoja 2

1. Sea K una superficie topológica compacta, conexa y con borde. Demuestra que el borde ∂K tiene un numero finito de componentes conexas.

2. Demuestra para el espacio proyectivo $P_2(\mathbb{R})$, la banda de Möbius M, la botella de Klein K y el toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$:

a. $\chi(P_2(\mathbb{R})) = 1$

b. $\chi(K) = 0$

c. $\chi(M) = 0$

d. $\chi(\mathbb{T}) = 0$

Consejo: Para a. puedes utilizar el hecho que $\chi(S^2) = 2$

3. A cual superficie en la lista (de superficies compactas, conexas, con borde) es homeomorfa la suma conexa

$$\mathbb{T} \ \sharp \ C,$$

donde $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ y $C = S^1 \times [0,1]$?

4. Demuestra que si M, N, L so variedades diferenciales y $f\colon M \to N$, $g\colon N \to L$ aplicaciones diferenciables, entonces $g \circ f\colon M \to L$ es una aplicación diferenciable.

5. Encuentra una estructura de variedad diferencial en

$$Q := \{(x,y) : x \in [-1,1], y \in \{-1,1\}\} \cup \{(x,y) : x \in \{-1,1\}, y \in [-1,1]\}$$

(el borde de un cuadrado) con la topología subespacio inducida por $\mathbb{R}^2$.

6. Sea M una variedad diferencial conexa y p, q puntos de M. Demuestra que existe una aplicación diferenciable $c\colon [0,1] \to M$ tal que $c(0) = p, c(1) = q$.
Observación: Como $[0,1]$ no es una variedad diferencial segundo la definición dada en clase (porque tiene borde), hay que definir cuando una aplicación $c\colon [0,1] \to M$ es diferenciable: lo es cuando existe un $\epsilon > 0$ y una aplicación diferenciable $\tilde{c}\colon (-\epsilon, 1+\epsilon) \to M$ tal que $\tilde{c}|_{[0,1]} = c$.
Consejo: Puedes utilizar, sin demonstración, el hecho que una variedad topológia conexa es automaticamente conexa por caminos.