Marco Zambon a discutir: 22/02/2011
Geometría III, curso 2010-11

Hoja 1

1. Considera
$$M := \{(x,0) : x < 0\} \cup \{(x,y) : x \geq 0, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$
con la topología subespacio inducida por $\mathbb{R}^2$.

a. Demuestra que M no es una variedad topológica.

b. Demuestra que M no es una variedad topológica con borde.

Consejo: Utiliza el teorema de invariancia del dominio.

2. Sea M una variedad topológica de dimension n con borde. Demuestra:

a. $Int(M)$ es una variedad topológica de dimension n (sin borde).

b. ∂M es una variedad topológica de dimension $n-1$ (sin borde).

3. **a**. Sea X un espacio topológico compacto, Y un espacio topológico Hausdorff, y $f\colon X \to Y$ una biyección continua. Demuestra: entonces f es un homeomorfismo.

b. Sea Z un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en Z. Denota por $\pi\colon Z \to Z/\sim$ la aplicación canonica al espacio cociente. Describe las condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación $F\colon Z \to Y$ induzca una aplicación $\tilde{F}\colon Z/\sim \to Y$ (es decir, para que exista una aplicación $\tilde{F}$ tal que $F = \tilde{F} \circ \pi$). En este caso, demuestra que F es continua si y solo si $\tilde{F}$ es continua.

c. Sea Z un espacio topológico compacto, $\sim$ una una relación de equivalencia en Z, y Y un espacio topológico Hausdorff. Sea $F\colon Z \to X$ una aplicación continua, sobreyectiva, y tal que $z \sim z' \Leftrightarrow F(z) = F(z')$. Demuestra: F induce un homeomorfismo $\tilde{F}\colon Z/\sim \to Y$.

Nota: Para a. es útil saber que un subconjunto compacto de un espacio topologico Hausdorff es automaticamente cerrado.

4. **a**. Sea $P_1(\mathbb{R})$ el cociente de $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ por la relación de equivalencia $z \sim -z$. A qué es homeomorfo $P_1(\mathbb{R})$?

b. Sea $M := P_2(\mathbb{R})$, definida como en clase. El borde ∂M está vacio o no? Demuestra.

c. $P_2(\mathbb{R})$ es compacto o no? Demuestra.

5 (Un poco más difícil)**.** Para cada $\alpha \in [0,1]$, considera la aplicación
$$\Phi\colon \mathbb{R} \to S^1 \times S^1, t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i t \alpha}),$$
donde $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Supongamos que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

a. Demuestra que Φ es inyectiva y continua.

b. Demuestra que $\Phi\colon \mathbb{R} \to \Phi(\mathbb{R})$ no es un homeomorfismo. Por qué no hay ninguna contradición con la pregunta 3a? (Aquí $\Phi(\mathbb{R})$ tiene la topología subespacio inducida por el toro $S^1 \times S^1$).

c. Es $\Phi(\mathbb{R})$ es una variedad topológica o no?