Marco Zambon 23/05/2011
Geometría III, curso 2010-11

Examen Final

Tu nombre:
Tu DNI:

(deja esta tabla vacía)

Ej. 1	
Ej. 2	
Ej. 3	
Ej. 4	
Ej. 5	
Ej. 6	
Total (de 100)	

Instrucciones: escribe en cada hoja tu nombre y el número del problema.
Justifica todas tus respuestas. Puedes utilizar, citándolos de manera apropiada, resultados que hemos obtenido en clase o en los ejercicios para casa.

---

1 (8+8 puntos)**.** Consideramos las siguientes superficies topológicas: la esfera S^2, el toro $\mathbb{T}$ y el plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$.

a. ¿ Es $\mathbb{T}$ homeomorfo a $P_2(\mathbb{R}) \sharp P_2(\mathbb{R})$?

b. ¿ Es $\mathbb{T} \sharp P_2(\mathbb{R}) \sharp S^2$ homeomorfo a $P_2(\mathbb{R}) \sharp P_2(\mathbb{R}) \sharp P_2(\mathbb{R})$?

2 (8+8 puntos)**.** Sea $n \geq 1$, S^n la esfera de dimension n, y $P_n(\mathbb{R}) := S^n / \sim$, donde la relación de equivalencia es: $p \sim q \Leftrightarrow (q = p \text{ o bien } q = -p)$. Sea $\pi \colon S^n \to P_n(\mathbb{R})$ la proyección.

a. Sea $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. ¿Bajo qué condiciones existe una función $h \colon P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $f = h \circ \pi$?

b. Cuando h existe, es h diferenciable? **el ejercicio continua...**

Recuerda: La estructura de variedad diferencial en $P_n(\mathbb{R})$ es tal que la proyección $\pi\colon S^2 \to P_n(\mathbb{R})$ es un difeomorfismo local.

3 (8+8 puntos)**.** Sea

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Considera también el campo vectorial $X = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$ en $\mathbb{R}^3$.

a. ¿Qué $c \in \mathbb{R}$ son valores regulares de F?

b. ¿ Es $X_p \in T_p(F^{-1}(c))$ para cada valor regular c de F y cada $p \in F^{-1}(c)$?

4 (8+8 puntos)**.**

a. Considera $\mathbb{R}^2$, con coordenadas x y y. Calcula el flujo del campo vectorial $y\frac{\partial}{\partial x}$.

b. Sea X un campo vectorial en una variedad diferencial M. Denotamos $\Phi_t : M \to M$ al flujo de X (supongamos por simplicidad que está definido para todos $t \in \mathbb{R}$). Demuestra que

$$\{p \in M : X_p = 0\} = \{p \in M : \Phi_t(p) = p \text{ para todos } t \in \mathbb{R}\}.$$

5 (4+8+8 puntos)**.**

a. Considera $xdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. ¿ Existe $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ con $d\beta = xdy \wedge dz$?

b. Para cada $n \geq 1$ denotamos $\overrightarrow{0}$ al origen en $\mathbb{R}^n$, e $Id\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la identidad. Sea $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $(-Id)^*\alpha = \alpha$. Demuestra que $\alpha(v) = 0$ para todos $v \in T_{\overrightarrow{0}}\mathbb{R}^n$.

c. ¿Para qué $k \in \{0, \dots, n\}$ es

$$\{\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n) : (-Id)^*\alpha = \alpha\} \subset \{\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n) : \alpha(v_1, \dots, v_k) = 0 \ \ \forall v_1, \dots, v_k \in T_{\overrightarrow{0}}\mathbb{R}^n\}?$$

Recuerda: si $F\colon M \to N$ es una aplicación entre variedades diferenciales y $\alpha \in \Omega^k(N)$, entonces $F^*\alpha \in \Omega^k(M)$ está definida así: para cada $p \in M$ y $v_1, \dots, v_k \in T_pM$, tenemos

$$(F^*\alpha)_p(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{F(p)}(F_*(p)v_1, \dots, F_*(p)v_k).$$

6 (8+8 puntos)**.** Sea M una variedad diferencial y g una métrica Riemanniana en M.

a. Sea $F \in C^\infty(M)$. Para cada $p \in M$ y $v, w \in T_pM$ definimos

$$(g^F)_p(v, w) := F(p) \cdot g_p(v, w).$$

¿ Qué condiciones tiene que cumplir F para que g^F sea una métrica Riemanniana en M?

b. Sea $F \in C^\infty(M)$ tal que $F(p) \geq 1$ para todos $p \in M$. ¿Es $d_{g^F}(p, q) \geq d_g(p, q)$ para todos $p, q \in M$?

Aquí d_g denota la distancia en la variedad Riemanniana (M, g), y d_{g^F} denota la distancia en la variedad Riemanniana (M, g^F).