Marco Zambon 29/03/2011
Geometría III, curso 2010-11

Examen Parcial: soluciones

Aquí pongo, para cada problema, una solución. Está claro que puede haber otras soluciónes también!

---

1. *[8 puntos] Considera la variedad topológica con borde*

$$M := \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\}$$

y considera esta relación de equivalencia en M: cada punto de M es equivalente sólo a sí mismo excepto los puntos del borde $\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} = 1\} \cup \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} = 2\}$, para los que se cumple

$$(x,y) \sim (2x, 2y)$$

para cada $(x,y) \in M$ con $\sqrt{x^2+y^2} = 1$.
Construye un homeomorfismo del cociente $M/\sim$ a una superficie en la lista del teorema de clasificación de superficies compactas y conexas.

Construimos un homeomorfismo de $M/\sim$ al toro $S^1 \times S^1$. Utilizamos la identificación $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, (x,y) \mapsto x+iy$ para simplificar[1] la notación, es decir, tomamos $M = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2\}$ y $z \sim 2z$ para todos z con $|z| = 1$. La aplicación

$$F \colon M \to S^1 \times S^1, z \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, e^{2\pi i |z|}\right)$$

es claramente continua. F es sobreyectiva: dados $(w_1, w_2) \in S^1 \times S^1$, tenemos $F(w_1 r) = (w_1, w_2)$ donde $r \in [1,2)$ está determinado por $e^{2\pi i r} = w_2$. Como $1 \le |z| \le 2$ para todos $z \in M$, tenemos

$$\begin{aligned}
F(z) = F(z') \Leftrightarrow & |z| - |z'| \in \mathbb{Z} \text{ y } \frac{z}{|z|} = \frac{z'}{|z'|} \\
\Leftrightarrow & (|z| = |z'| \text{ o bien } |z| = 1, |z'| = 2 \text{ o bien } |z| = 2, |z'| = 1) \text{ y } \frac{z}{|z|} = \frac{z'}{|z'|} \\
\Leftrightarrow & z = z' \text{ o bien } |z| = 1, z = \frac{z'}{2} \text{ o bien } |z'| = 1, z' = \frac{z}{2} \\
\Leftrightarrow & z \sim z'.
\end{aligned}$$

Ademas M es compacta y el toro $S^1 \times S^1$ es Hausdorff, por lo tanto podemos utilizar el ejercicio 3 de la hoja 1 y concluir que la aplicación

$$\tilde{F} \colon M/\sim \to S^1 \times S^1,$$

determinada por $\tilde{F} \circ \pi = F$ donde $\pi \colon M \to M/\sim$ es la proyección canonica, es un homeomorfismo.

[1] Para escribir la demostración en terminos de $\mathbb{R}^2$ utiliza $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ para $x, y \in \mathbb{R}$ y $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$ para $\theta \in \mathbb{R}$.

2. *[7 puntos] Sea $P_2(\mathbb{R})$ el plano proyectivo y $\mathbb{T} := S^1 \times S^1$ el toro. ¿ A qué superficie en la lista de superficies compactas y conexas es homeomorfa la suma conexa*

$$P_2(\mathbb{R}) \sharp \mathbb{T} \ \ ?$$

Demuestra.

Utilizamos el teorema de clasificación de superficies compactas y conexas (sin borde), que clasifica dichas superficies por su orientabilidad y numero de Euler. $P_2(\mathbb{R}) \sharp \mathbb{T}$ no es orientable, porque $P_2(\mathbb{R})$ no lo es (contiene una banda de Möbius). Tenemos

$$\chi(P_2(\mathbb{R}) \sharp \mathbb{T}) = \chi(P_2(\mathbb{R})) + \chi(\mathbb{T}) - 2 = 1 + 0 - 2 = -1.$$

Por lo tanto $P_2(\mathbb{R}) \sharp \mathbb{T}$ es homeomorfo $P_2(\mathbb{R}) \sharp P_2(\mathbb{R}) \sharp P_2(\mathbb{R})$, ya que esta no es orientable y tiene numero de Euler -1.

3. *[8 puntos] ¿ Es verdad que $\mathbb{R}$, con su topología canonica, admite un numero infinito de estructuras de variedad diferencial (distintas entre sí)? Demuéstralo.*

Sí, es verdad. Para cada $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ sea $\mathcal{A}_{2n+1}$ el atlas diferencial maximal que contiene el homeomorfismo $\phi_{2n+1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{2n+1}$. Los $\mathcal{A}_{2n+1}$ son distintos dos a dos: dados $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, digamos con $n < m$, tenemos que $\phi_{2n+1} \notin \mathcal{A}_{2m+1}$ porque el cambio de coordenadas $\phi_{2n+1} \circ (\phi^{2m+1})^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $x^{\frac{2n+1}{2m+1}}$ y por lo tanto no es diferenciable en zero.

4 (7 puntos)**.** *Sea M una variedad diferencial de dimensión n, S una subvariedad de M de dimensión k, y p un punto de S. Demuestra que existe un entorno abierto U de p en M y una aplicación diferenciable $F \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ tal que*

$$U \cap S = F^{-1}(0).$$

Por definición de subvariedad, existe una carta (U, ϕ) de la variedad diferencial M adaptada a S y con $p \in U$. Es decir, U es un entorno abierto de p en M y $\phi \colon U \to \phi(U)$ es un difeomorfismo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, donde $\{0\}$ es la origen en $\mathbb{R}^{n-k}$. Considera la aplicación

$$F := \pi \circ \phi \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$$

donde $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ es la proyección a las últimas $n-k$ componentes. F es diferenciable porque bajo la carta ϕ corresponde a π, que es una aplicación diferenciable entre abiertos del espacio euclideo, o alternativamente porque F es la composición de dos aplicaciónes diferenciables. Ademas

$$\begin{aligned} F^{-1}(0) &= \phi^{-1}(\pi^{-1}(0)) \\ &= \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \\ &= \phi^{-1}(\phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) \\ &= U \cap S. \end{aligned}$$