Marco Zambon 29/03/2011
Geometría III, curso 2010-11

Examen Parcial

Por favor, escribid en cada hoja vuestro nombre y el número del problema.
Podéis utilizar, citándolos de manera apropriada, resultados que hemos obtenido en clase o en los ejercicios para casa.

---

1 (8 puntos)**.** Considera la variedad topológica con borde

$$M := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$$

y considera esta relación de equivalencia en M: cada punto de M es equivalente sólo a sí mismo excepto los puntos del borde $\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} \cup \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} = 2\}$, para los que se cumple

$$(x, y) \sim (2x, 2y)$$

para cada $(x, y) \in M$ con $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Construye un homeomorfismo del cociente $M/\sim$ a una superficie en la lista del teorema de clasificación de superficies compactas y conexas.

2 (7 puntos)**.** Sea $P_2(\mathbb{R})$ el plano proyectivo y $\mathbb{T} := S^1 \times S^1$ el toro. ¿ A qué superficie en la lista de superficies compactas y conexas es homeomorfa la suma conexa

$$P_2(\mathbb{R}) \sharp \mathbb{T} \ \ ?$$

Demuestra.

3 (8 puntos)**.** ¿ Es verdad que $\mathbb{R}$, con su topología canonica, admite un numero infinito de estructuras de variedad diferencial (distintas entre sí)? Demuéstralo.

4 (7 puntos)**.** Sea M una variedad diferencial de dimensión n, S una subvariedad de M de dimensión k, y p un punto de S. Demuestra que existe un entorno abierto U de p en M y una aplicación diferenciable $F \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ tal que

$$U \cap S = F^{-1}(0).$$